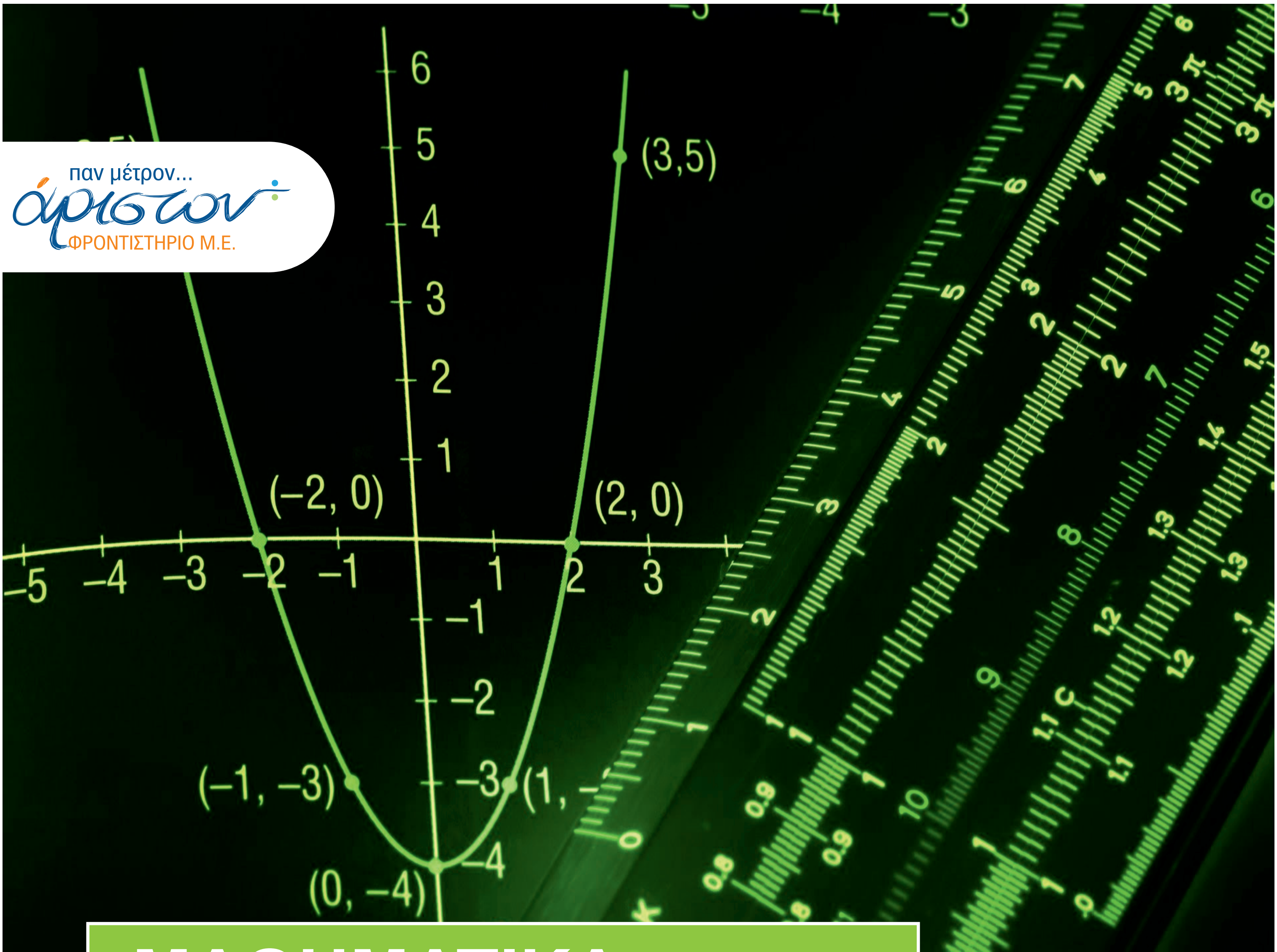
παν μέτρον... άριστον
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ Μ.Ε.



ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

β΄ λυκείου

Θετικού προσανατολισμού

Ταμβάκης Θανάσης

περιλαμβάνει

- Συνοπτική θεωρία
- Αποδείξεις στην θεωρία
- Ασκήσεις προς λύση
- Υποδειγματικά λυμένες ασκήσεις
- Θέματα που καλύπτουν όλο το φάσμα της ύλης
- Επαναληπτικά θέματα

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το βιβλίο αυτό απευθύνεται σε μαθητές Β' τάξης του Λυκείου που προσανατολίζονται στις θετικές επιστήμες.

Σκοπός του είναι να εμπλουτίσει τις γνώσεις των μαθητών, να τους δώσει την ευκαιρία να ασχοληθούν με μια ευρεία γκάμα ασκήσεων και να ενεργοποιήσει την κριτική τους σκέψη.

Περιέχει:

- **Συνοπτική θεωρία**
- **Αποδείξεις στην θεωρία**
- **Ασκήσεις προς λύση**
- **Υποδειγματικά λυμένες ασκήσεις**
- **Θέματα που καλύπτουν όλο το φάσμα της ύλης**
- **Επαναληπτικά θέματα**

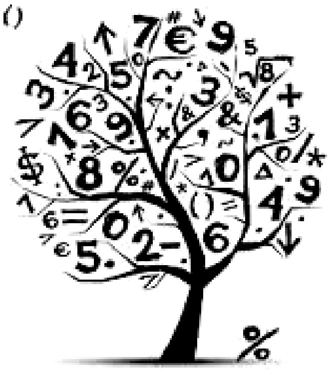
Πιστεύω πως αυτό το βιβλίο μπορεί να αποτελέσει ιδιαίτερα χρήσιμο βοήθημα για την αρτιότερη κατανόηση και μελέτη των εννοιών που πραγματεύεται, καθώς και ένα πολύτιμο εργαλείο προς τους μαθητές για να πετύχουν τους στόχους τους.

Με θερμές ευχές για επιτυχία,

Θανάσης Ταμβάκης

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

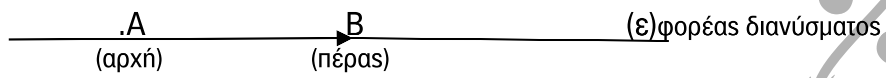
ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ
ΤΥΠΟΙ-ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ
ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΕΣ



Α. Συνοπτική θεωρία – Τυπολόγιο

Εισαγωγικά

•➢ **Διάνυσμα :** Είναι κάθε προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα $\vec{AB}$

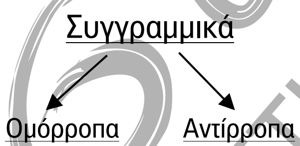


•➢**Μέτρο (μήκος) διανύσματος** : $|\vec{AB}|$
•➢**Μέτρο (μήκος) διανύσματος** : $|\vec{AB}|$

•➢ **Μηδενικό διάνυσμα** : $\vec{AA} = \vec{0}$ με $|\vec{AA}| = 0$.

•➢**Μοναδικό διάνυσμα** με $|\vec{AB}| = 1$

•➢ **Παράλληλα (συγγραμμικά)** : $\vec{AB} \,//\, \vec{\Gamma\Delta}$ έχουν ίδιο φορέα ή παράλληλους φορείς.



$\vec{AB} \uparrow\uparrow \vec{\Gamma\Delta}$ Ίδια κατεύθυνση $\quad$ $\vec{AB} \uparrow\downarrow \vec{\Gamma\Delta}$ αντίθετη κατεύθυνση (φορά)

•➢ **Ίσα διανύσματα** $\vec{AB} = \vec{\Gamma\Delta}$ (ομόρροπα με ίσα μέτρα)

•➢ **Αντίθετα διανύσματα** με $\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{0}$ (αντίρροπα με ίσα μέτρα)

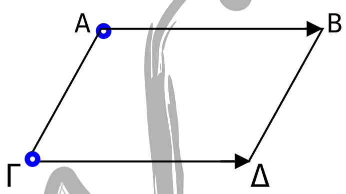
ισχύει $\vec{AB} = -\vec{BA}$ (μπορώ να αλλάξω τη σειρά των γραμμάτων σ' ένα διάνυσμα βγάζοντας μπροστά ένα ΄΄ - ΄΄ .)

• ➢ **<u>Γωνία</u>** των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$: $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}})$ με $0 \le \theta \le \pi$

✓ αν θ = 0 τότε $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$

✓ αν θ = π τότε $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$ ενώ αν $\theta = \frac{\pi}{2}$ τότε $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$

• ➢ **<u>Εφαρμογές</u>**



α) Αν $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta} \Rightarrow$ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο

τότε και $\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{B\Delta}$

β) Αν $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} \Leftrightarrow$ Μ μέσο του $\overline{AB}$

• ➢ **<u>Πράξεις</u>**

✓ Αν Ο σταθερό σημείο τότε το $\overrightarrow{OM}$ λέγεται διανυσματική ακτίνα του Μ.

Κάθε διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ αναλύεται σαν <u>άθροισμα</u> δυο διανυσμάτων

ή σαν <u>διαφορά</u> $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\end{array}\right\}$ με βάση πχ. το σημείο Ο.

(διανυσματική ακτίνα του τέλους
μείον διανυσματική ακτίνα της αρχής)

<u>Γινόμενο</u> αριθμό $\lambda \in R$ με διάνυσμα $\vec{\alpha}$: $\lambda \cdot \vec{\alpha}$

• ➢ **<u>Ιδιότητες</u>** :

$\rightarrow \vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\beta} + \vec{\alpha}$

$(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma} = \vec{\alpha} + (\vec{\beta} + \vec{\gamma})$

$\vec{\alpha} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{\alpha} = \vec{\alpha}$

$\vec{\alpha} + (-\vec{\alpha}) = \vec{0}$

$\rightarrow \lambda \cdot (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = \lambda\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}$

$(\lambda + \mu) \cdot \vec{\alpha} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta}$

$\lambda \cdot (\mu\vec{\alpha}) = (\lambda\mu) \cdot \vec{\alpha}$

αν $\lambda\vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$, $\lambda \neq 0 \Rightarrow \vec{\alpha} = \vec{\beta}$

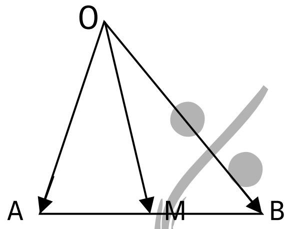
αν $\lambda\vec{\alpha} = \mu\vec{\alpha}$, $\vec{\alpha} \neq 0 \Rightarrow \lambda = \mu$

$\rightarrow \left||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|\right| \le |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \le |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$

•➢ **Γραμμικός Συνδυασμός** των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι το $\vec{v} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta}$, $\lambda,\mu \in R$.

•➢ **Διανυσματική ακτίνα** μέσου τμήματος ΑΒ.

$$\overrightarrow{AB} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$$



•➢ **Συντεταγμένες** $\vec{i}$, $\vec{j}$: μοναδιαία διανύσματα με $\vec{i} \perp \vec{j}$

✓ Κάθε διάνυσμα $\vec{\alpha}$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{i}$ και $\vec{j}$.

´´ Αν Α (x,y) τότε $\overrightarrow{OA} = (x,y)$ ´´

$\vec{\alpha} = x\cdot\vec{i} + y\cdot\vec{j}$ ή $\vec{\alpha} = (x,y)$

Αν $\vec{\alpha} = (x_1,y_1)$ $\vec{\beta} = (x_2,y_2)$ τότε

✓ $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = (x_1 + x_2 , y_1 + y_2)$, $\lambda\vec{\alpha} = (\lambda x_1,\lambda y_1)$

✓ Αν Μ(x,y) μέσο του ΑΒ τότε $M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$

✓ Αν $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ τότε $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1 , y_2 - y_1)$

✓ Αν $\vec{\alpha} = (x,y)$ τότε $|\vec{\alpha}| = \sqrt{x^2+y^2}$.

✓ Αν $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$: $(AB) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

✓ Αν $\vec{\alpha} = (x,y)$ τότε $\lambda_{\vec{\alpha}} = \frac{y}{x}$ συντελεστής διεύθυνσης του $\vec{\alpha}$.

• **Συνθήκες Παραλληλίας**

✓ $\vec{\alpha} \mathbin{//} \vec{\beta} \Leftrightarrow$ υπάρχουν $\lambda \in R$ ώστε $\vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta}$

✓ Αν γνωρίζω τις συντεταγμένες $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$, $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$

τότε $\vec{\alpha} \mathbin{//} \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$

ή $\lambda_1 = \lambda_2 \Leftrightarrow \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$.

• **Εσωτερικό Γινόμενο .**

✓ $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \text{συν}(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}})$

✓ $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$ αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$

- Αν $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$ $\qquad \vec{\alpha}^2 = |\vec{\alpha}|^2$

  Αν $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$ $\qquad \vec{i} \cdot \vec{j} = 0$

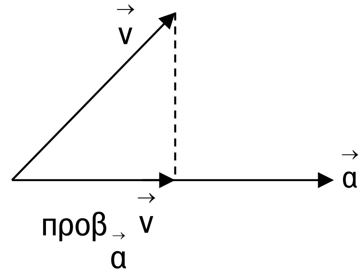
  Αν $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$ $\qquad \vec{i}^2 = \vec{j}^2 = 1$

- $(\lambda \vec{\alpha}) \vec{\beta} = \vec{\alpha} (\lambda \vec{\beta}) = \lambda (\vec{\alpha} \vec{\beta})$

  $\vec{\alpha} (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = \vec{\alpha} \vec{\beta} + \vec{\alpha} \vec{\gamma}$

  $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_2 = -1$

✓ Προβολή διανύσματος σε διάνυσμα



Ισχύει $\vec{\alpha} \cdot \vec{v} = \vec{\alpha} \; \text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{v}$.

Β) Αποδείξεις στη θεωρία

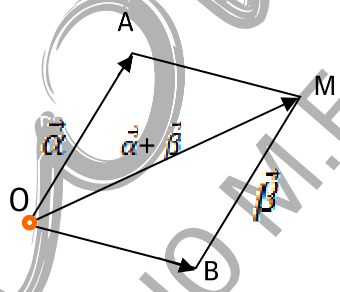
Θεωρία 1 : Αποδείξτε τις ιδιότητες για το άθροισμα διανυσμάτων

(1) $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\vec{\beta}+\vec{\alpha}$ (αντιμεταθετική ιδιότητα)

(2) $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\vec{\gamma}=\vec{\alpha}+(\vec{\beta}+\vec{\gamma})$ (προσεταιριστική ιδιότητα)

Απόδειξη

1) Σύμφωνα με το διπλανό σχήμα έχουμε



$$\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OM}$$

και

$$\vec{\beta}+\vec{\alpha}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{OM}$$

άρα

$$\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\vec{\beta}+\vec{\alpha}$$

2) Από το διπλανό σχήμα έχουμε

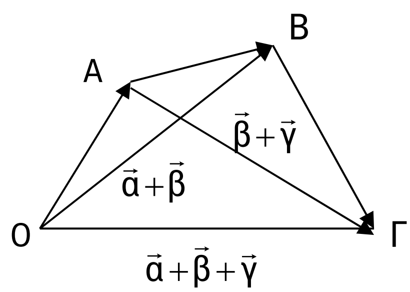
$$(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\vec{\gamma}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{O\Gamma}$$

και

$$\vec{\alpha}+(\vec{\beta}+\vec{\gamma})=\overrightarrow{OA}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma})=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{O\Gamma}$$

Άρα

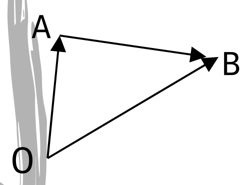
$$(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\vec{\gamma}=\vec{\alpha}+(\vec{\beta}+\vec{\gamma})$$



<u>Θεωρία 2</u> : Τι ονομάζουμε διάνυσμα , θέσεως σημείου Α ή διανυσματική ακτίνα του Α .
Αποδείξτε ότι κάθε διάνυσμα στο χώρο είναι ίσο με τη διανυσματική ακτίνα του πέρατος μείον τη διανυσματική ακτίνα της αρχής.

<u>Απόδειξη</u>

Έστω Ο ένα σταθερό σημείο του χώρου . Για κάθε σημείο Α του χώρου ορίζεται το διάνυσμα $\vec{OA}$, το οποίο λέγεται διάνυσμα θέσης του Α ή διανυσματική ακτίνα του Α.



Έστω Ο ένα σημείο αναφοράς . Τότε για οποιαδήποτε διάνυσμα $\vec{AB}$ ισχύει : $\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}$ και ισοδύναμα $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$

<u>Θεωρία 3</u> : Αποδείξτε ότι αν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ δύο διανύσματα με $\vec{\beta} \neq \vec{0}$ τότε $\vec{\alpha} \,//\, \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \lambda \cdot \vec{\beta}$, $\lambda \in R$.

<u>Απόδειξη</u>

Αν δυο διανύσματα και $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta} \neq \vec{0}$ συνδέονται με τη σχέση $\vec{\alpha} = \lambda \cdot \vec{\beta}$, τότε τα διανύσματα αυτά είναι παράλληλα (εξ ορισμού του γινομένου αριθμού με διάνυσμα).

Αντίστροφα αν $\vec{\alpha} \,//\, \vec{\beta}$ τότε υπάρχει μοναδικός αριθμός λ ώστε $\vec{\alpha} = \lambda \cdot \vec{\beta}$

Θέτοντας $\kappa = \dfrac{|\vec{\alpha}|}{|\vec{\beta}|} \Leftrightarrow |\vec{\alpha}| = \kappa |\vec{\beta}|$ και συνεπώς

- αν $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$ τότε $\vec{\alpha} = \kappa \vec{\beta}$
- αν $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$ τότε $\vec{\alpha} = -\kappa \vec{\beta}$
- αν $\vec{\alpha} = \vec{0}$ τότε $\vec{\alpha} = 0 \cdot \vec{\beta}$

Άρα σε κάθε περίπτωση υπάρχει λ μοναδικό ώστε $\vec{\alpha} = \lambda \cdot \vec{\beta}$

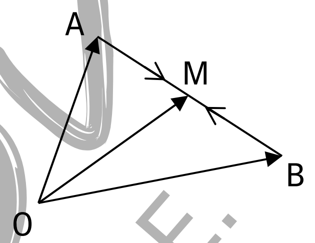
Θεωρία 4 : Αποδείξτε ότι για τη διανυσματική ακτίνα $\overrightarrow{OM}$ του μέσου M ευθύγραμμου τμήματος AB ισχύει :

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$$

Απόδειξη

Θεωρούμε διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ και ένα σημείο αναφοράς O.

Για τη διανυσματική ακτίνα $\overrightarrow{OM}$ του μέσου M του τμήματος AB έχουμε:



$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$ (1) και $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM}$ (2)

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) παίρνουμε :

$2\,\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ άρα $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$

($\overrightarrow{AM}$ και $\overrightarrow{BM}$ αντίθετα)

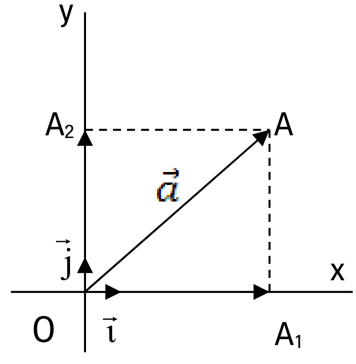
Θεωρία 5 : Αποδείξτε ότι οποιοδήποτε διάνυσμα , έστω $\vec{\alpha}$, του επιπέδου γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των μοναδικών διανυσμάτων $\vec{i}$ και $\vec{j}$ και μάλιστα κατά μοναδικό τρόπο.

Απόδειξη

Θεωρούμε σύστημα συντεταγμένων Oxy στο επίπεδο και $\vec{\alpha}$ διάνυσμα του επιπέδου. Με αρχή το O γράφουμε το $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$

Αν A_1 και A_2 οι προβολές του A στους άξονες x΄x και y΄y αντίστοιχα ,

Έχουμε $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}$ (1) .



Αν x,y οι συντεταγμένες του A τότε

$\overrightarrow{OA_1} = x \cdot \vec{i}$ και $\overrightarrow{OA_2} = y \cdot \vec{j}$. Επομένως

(1) $\Rightarrow$ $\vec{\alpha} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$ **(2)** δηλ. το $\vec{\alpha}$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $\vec{i}$, $\vec{j}$.

Θα αποδείξουμε ότι η παραπάνω έκφραση είναι μοναδική.

Έστω το $\vec{\alpha}$ γράφεται και ως εξής : $\vec{\alpha} = x'\cdot\vec{i} + y'\cdot\vec{j}$ (3)

όπου $x \neq x'$ και $y \neq y'$.

Από (2) και (3) ισχύει $x\cdot\vec{i} + y\cdot\vec{j} = x'\cdot\vec{i} + y'\cdot\vec{j}$

$$x\cdot\vec{i} - x'\cdot\vec{i} = y'\cdot\vec{j} - y\cdot\vec{j}$$

$$(x - x')\vec{i} = (y' - y)\vec{j} \qquad \text{για } x - x' \neq 0$$

$$\vec{i} = \frac{y'-y}{x-x'}\cdot\vec{j} \text{ δηλ. } \vec{i} \parallel \vec{j}$$

που είναι άτοπο αφού τα $\vec{i}$ και $\vec{j}$ δεν είναι συγγραμμικά. Επομένως $x = x'$ και $y = y'$.

Θεωρία 6 : Αν γνωρίζετε τις συντεταγμένες δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ του καρτεσιανού επιπέδου , τότε να βρείτε τις συντεταγμένες του αθροίσματος $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$, του γινομένου $\lambda\cdot\vec{\alpha}$, $\lambda\in R$ και να εκφράσετε τις συντεταγμένες κάθε γραμμικού συνδυασμού των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ συναρτήσει των συντεταγμένων των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

Απόδειξη

Αν $\vec{\alpha} = (x_1,y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2,y_2)$ τότε

✓ $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = (x_1\vec{i}, y_1\vec{j}) + (x_2\vec{i}, y_2\vec{j}) = (x_1+x_2)\vec{i} + (y_1+y_2)\vec{j}$

Επομένως $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = (x_1+x_2 , y_1+y_2)$ ή $(x_1,y_1) + (x_2,y_2) = (x_1+x_2 , y_1+y_2)$

✓ $\lambda\cdot\vec{\alpha} = \lambda(x_1\vec{i} + y_1\vec{j}) = (\lambda x_1)\vec{i} + (\lambda y_1)\vec{j}$.

Επομένως $\lambda\cdot\vec{\alpha} = (\lambda x_1 , \lambda y_1)$ ή $\lambda(x_1,y_1) = (\lambda x_1,\lambda y_1)$

✓ Γενικότερα για τον γραμμικό συνδυασμό $\lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta}$ έχουμε

$\lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta} = (\lambda x_1,\lambda y_1) + (\mu x_2,\mu y_2) = (\lambda x_1 + \mu x_2 , \lambda y_1 + \mu y_2)$.

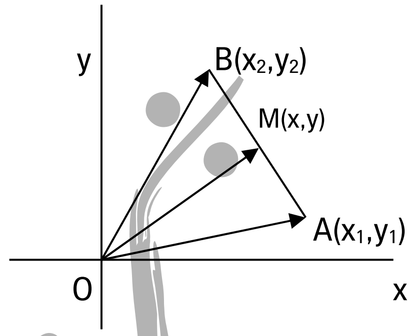
Θεωρία 7 : Θεωρούμε δυο σημεία $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ του επιπέδου και έστω (x,y) οι συντεταγμένες του μέσου Μ του ΑΒ. Δείξτε ότι $x = \frac{x_1+x_2}{2}$ και $y = \frac{y_1+y_2}{2}$.

Απόδειξη

Γνωρίζουμε ότι $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$

Όπου $\overrightarrow{OM} = (x,y)$, $\overrightarrow{OA} = (x_1,y_1)$, $\overrightarrow{OB} = (x_2,y_2)$

Άρα $(x,y) = \frac{1}{2}[(x_1,y_1) + (x_2,y_2)] = \left(\frac{x_1+x_2}{2} + \frac{y_1+y_2}{2}\right)$.



Θεωρία 8 : Αποδείξτε ότι οι συντεταγμένες (x,y) του διανύσματος με άκρα τα σημεία $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$, δίνονται από τις σχέσεις $x = x_2 - x_1$ και $y = y_2 - y_1$.

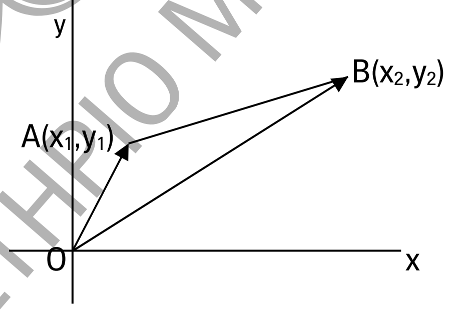
Απόδειξη

Έστω (x,y) οι συντεταγμένες του $\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ όπου $\overrightarrow{OB} = (x_2,y_2)$, $\overrightarrow{OA} = (x_1,y_1)$

Άρα
$(x,y) = (x_2,y_2) - (x_1,y_1) = (x_2 - x_1 , y_2 - y_1)$

Άρα $x = x_2 - x_1$ και $y = y_2 - y_1$.



Θεωρία 9 : Έστω $\vec{\alpha} = (x,y)$ ένα διάνυσμα του επιπέδου. Αποδείξτε ότι το μέτρο του διανύσματος είναι $|\vec{\alpha}| = \sqrt{x^2+y^2}$.

Απόδειξη

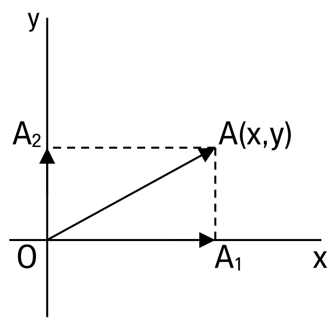
Έστω $\vec{\alpha} = (x,y)$ διάνυσμα και Α σημείο με διανυσματική ακτίνα $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$.

Έστω A_1 και A_2 οι προβολές του Α στους άξονες x΄x και y΄y αντίστοιχα.

Ισχύει $(OA_1) = |x|$ και $(OA_2) = |y|$. Από το τρίγωνο OA_1A_2 έχουμε :

$|\vec{\alpha}|^2 = (OA)^2 = (OA_1)^2 + (A_1A)^2 = (OA_1)^2 + (OA_2)^2 = |x|^2 + |y|^2 = x^2 + y^2$

Επομένως $|\vec{\alpha}| = \sqrt{x^2+y^2}$



Θεωρία 10 : Αποδείξτε ότι η απόσταση των σημείων $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ είναι ίση με

$$(AB) = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

Απόδειξη

Θεωρούμε δυο σημεία $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ του επιπέδου. Επειδή η απόσταση (ΑΒ) είναι ίση με το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1\ ,\ y_2 - y_1)$, τότε σύμφωνα με τον τύπο του μέτρου ισχύει

$$(AB) = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

Θεωρία 11 : Πως μπορούμε να εκφράσουμε το εσωτερικό γινόμενο δυο διανυσμάτων $\vec{\alpha} = (x_1,y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2,y_2)$ συναρτήσει των συντεταγμένων τους ;

Απόδειξη

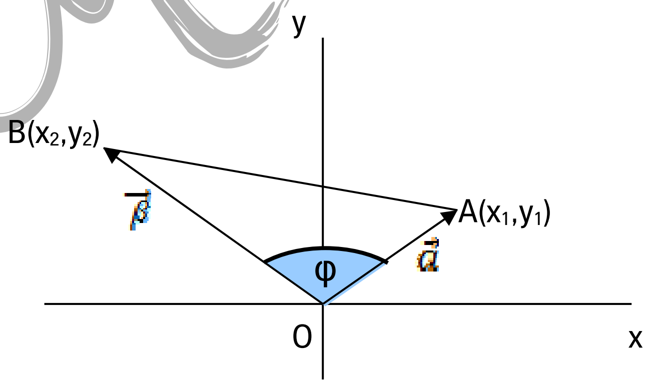
Από τον νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΟΑΒ έχουμε

$(AB)^2 = (OA)^2 + (OB)^2 - 2(OA)(OB)συν\,A\hat{O}B$.

Επομένως : $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - 2(OA)(OB)συνθ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ x_2^2 - 2x_1x_2 + x_1^2 + y_2^2 - 2y_1y_2 + y_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - 2(OA)(OB)συν\,A\hat{O}B \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ -2x_1x_2 - 2y_1y_2 = -2\,\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$. Τελικά $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = x_1x_2 + y_1y_2$



<u>Θεωρία 12</u> : Αποδείξτε τις επόμενες ιδιότητες

α) $\lambda\cdot\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \vec{\alpha}(\lambda\vec{\beta}) = \lambda(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})$, $\lambda\in R$

β) $\vec{\alpha}\,(\vec{\beta}+\vec{\gamma}) = \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}$

γ) $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1\lambda_2 = -1$ όπου $\lambda_1 = \lambda_{\vec{\alpha}}$, $\lambda_2 = \lambda_{\vec{\beta}}$ $(\vec{\alpha}, \vec{\beta} \not\parallel y'y)$.

<u>Απόδειξη</u>

Αν $\vec{\alpha} = (x_1,y_1)$, $\vec{\beta} = (x_2,y_2)$, $\vec{\gamma} = (x_3,y_3)$

α) $(\lambda\vec{\alpha})\vec{\beta} = (\lambda x_1,\lambda y_1)(x_2,y_2) = (\lambda x_1)x_2 + (\lambda y_1)y_2 = \lambda(x_1x_2 , y_1y_2) = \lambda(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})$

και $\vec{\alpha}(\lambda\vec{\beta}) = (x_1,y_1)(\lambda x_2, \lambda y_2) = x_1(\lambda x_2) + y_1(\lambda y_2) = \lambda(x_1x_2 , y_1y_2) = \lambda(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})$

Άρα $(\lambda\vec{\alpha})\vec{\beta} = \vec{\alpha}(\lambda\vec{\beta}) = \lambda(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})$.

β) $\vec{\alpha}\,(\vec{\beta}+\vec{\gamma}) = (x_1,y_1)(x_2+x_3 , y_2+y_3) = x_1(x_2+x_3) + y_1(y_2+y_3)$
$= (x_1x_2 + x_1x_3) + (y_1y_2 + y_1y_3) = (x_1x_2 + y_1y_2) + (x_1x_3 + y_1y_3)$
$= \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}$

γ) $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = 0 \Leftrightarrow y_1y_2 = -x_1x_2 \Leftrightarrow \dfrac{y_1y_2}{x_1x_2} = -1 \Leftrightarrow \lambda_1\lambda_2 = -1$

<u>Θεωρία 13</u> : Αν $\vec{\alpha} = (x_1,y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2,y_2)$ δυο μη μηδενικά διανύσματα του επιπέδου που σχηματίζουν γωνία θ. Δείξτε ότι συνθ = $\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$

<u>Απόδειξη</u>

Είναι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$ συνθ $\Leftrightarrow$ συνθ $= \dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|}$ όπου $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = x_1x_2 + y_1y_2$, $|\vec{\alpha}| = \sqrt{x_1^2+y_1^2}$ και

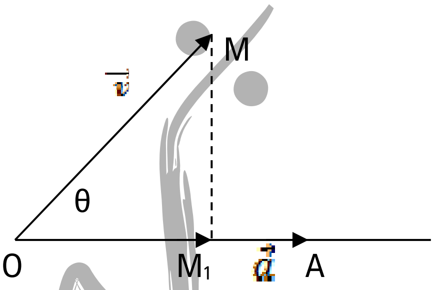
$|\vec{\beta}| = \sqrt{x_2^2+y_2^2}$

Επομένως συνθ = $\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$.

<u>**Θεωρία 14**</u> : Έστω $\vec{\alpha}$, $\vec{v}$ δυο διανύσματα του επιπέδου με $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$. Αποδείξτε ότι

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{v} = \vec{\alpha}\ \text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{v}$$

<u>Απόδειξη</u>



Με αρχή ένα σημείο O παίρνουμε τα διανύσματα

$\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OM} = \vec{v}$. Από το M φέρουμε κάθετο στη

διεύθυνση του $\overrightarrow{OA}$ και έστω M_1 το ίχνος της καθέτου.

Το διάνυσμα $\overrightarrow{OM_1}$ λέγεται προβολή του $\vec{v}$ στο $\vec{\alpha}$ και συμβολίζεται $\overrightarrow{OM_1} = \text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{v}$

Για το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\,\vec{v}\,\cdot$ έχουμε :

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{v} = \vec{\alpha}\,(\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M}) = \vec{\alpha}\,\overrightarrow{OM_1} + \overbrace{\vec{\alpha}\,\overrightarrow{M_1M}}^{0\ \text{(γιατί } \vec{\alpha}\perp\overrightarrow{M_1M}\text{)}} = \vec{\alpha}\,\overrightarrow{OM_1} = \vec{\alpha}\ \text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{v}$$

επομένως $\vec{\alpha}\cdot\vec{v} = \vec{\alpha}\ \text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{v}$

Γ. Λυμένες Ασκήσεις

1. Δίνεται κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Να δείξετε ότι $\vec{ΑΔ} + \vec{ΒΓ} = \vec{ΑΓ} + \vec{ΒΔ}$.

Λύση

Ά τρόπος : $\vec{ΑΔ} + \vec{ΒΓ} = \vec{ΑΓ} + \vec{ΒΔ} \Leftrightarrow \vec{ΑΔ} - \vec{ΑΓ} = \vec{ΒΔ} - \vec{ΒΓ} \Leftrightarrow \vec{ΓΔ} = \vec{ΓΔ}$ που ισχύει.

Έ τρόπος : έστω Ο τυχαίο σημείο . Τότε

$$\vec{ΑΔ} + \vec{ΒΓ} = \vec{ΟΔ} - \vec{ΟΑ} + \vec{ΟΓ} - \vec{ΟΒ} = \vec{ΟΔ} + \vec{ΟΓ} - \vec{ΟΑ} - \vec{ΟΒ} \quad (1)$$

$$\vec{ΑΓ} + \vec{ΒΔ} = \vec{ΟΓ} - \vec{ΟΑ} + \vec{ΟΔ} - \vec{ΟΒ} = \vec{ΟΔ} + \vec{ΟΓ} - \vec{ΟΑ} - \vec{ΟΒ} \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) $\Rightarrow \vec{ΑΔ} + \vec{ΒΓ} = \vec{ΑΓ} + \vec{ΒΔ}$

2. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ ώστε $\vec{ΑΓ} = \vec{ΑΒ} + \vec{ΑΔ}$. Να δείξετε ότι το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση

Ά τρόπος : είναι $\left.\begin{array}{l} \vec{ΑΓ} = \vec{ΑΒ} + \vec{ΑΔ} \\ \text{Όμως } \vec{ΑΓ} = \vec{ΑΒ} + \vec{ΒΓ} \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{ΑΒ} + \vec{ΑΔ} = \vec{ΑΒ} + \vec{ΒΓ}$

$\vec{ΑΔ} = \vec{ΒΓ}$ δηλ. το ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο.

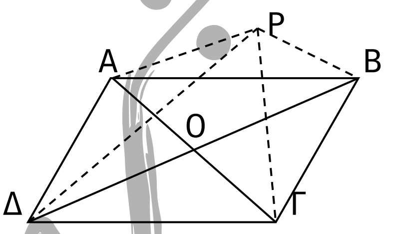
Έ τρόπος : $\vec{ΑΓ} = \vec{ΑΒ} + \vec{ΑΔ} \Leftrightarrow \vec{ΑΓ} - \vec{ΑΔ} = \vec{ΑΒ} \Leftrightarrow \vec{ΔΓ} = \vec{ΑΒ}$ άρα το ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο.

3. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τυχαίο σημείο Ρ του χώρου.

(i) Να δείξετε ότι $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{P\Gamma}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{P\Delta}$.

(ii) Να προσδιοριστεί η θέση του σημείου Ρ ώστε να ισχύει $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{P\Gamma}+\overrightarrow{P\Delta}=\vec{0}$.

Λύση



i) έστω Ο το κέντρο του ΑΒΓΔ. Τότε :

$$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{P\Gamma}=(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{O\Gamma})=$$
$$=2\overrightarrow{PO}+(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{O\Gamma})=2\overrightarrow{PO}\quad(1)$$

$$\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{P\Delta}=(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OB})+(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{O\Delta})=2\overrightarrow{PO}+(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Delta})=2\overrightarrow{PO}\quad(2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) παίρνουμε $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{P\Gamma}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{P\Delta}$

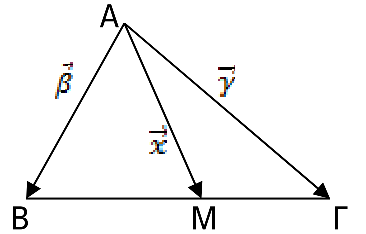
ii) είναι $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{P\Gamma}+\overrightarrow{P\Delta}=\vec{0}\Leftrightarrow(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{P\Gamma})+(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{P\Delta})=\vec{0}\overset{(1)\kappa(2)}{\Leftrightarrow}2\overrightarrow{PO}+2\overrightarrow{PO}=\vec{0}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{PO}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{PO}=\vec{0}$$

άρα το Ρ ταυτίζεται με το κέντρο Ο του παραλληλογράμμου.

4. Στο διπλανό σχήμα ισχύει (ΒΜ) = 3(ΜΓ) .

(i) $\overrightarrow{BM}=3\overrightarrow{M\Gamma}$, (ii) $\vec{x}=\frac{1}{4}(\vec{\beta}+3\vec{\gamma})$



Λύση

i) (ΒΜ) = 3(ΜΓ) $\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{BM}\right|=3\left|\overrightarrow{M\Gamma}\right|\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{BM}\right|=\left|3\overrightarrow{M\Gamma}\right|$ (1)

όμως $\overrightarrow{BM}\uparrow\uparrow\overrightarrow{M\Gamma}\Rightarrow\overrightarrow{BM}\uparrow\uparrow 3\overrightarrow{M\Gamma}$ (2)

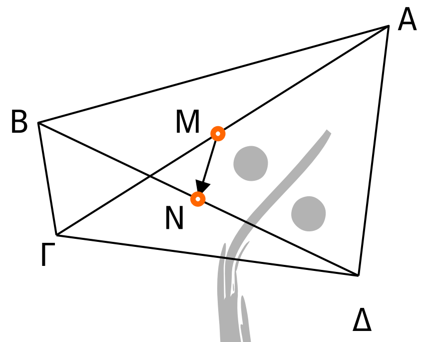
από (1) και (2) $\Rightarrow\overrightarrow{BM}=3\overrightarrow{M\Gamma}$ **(Δυο διανύσματα είναι ίσα όταν είναι ομόρροπα και έχουν ίσα μέτρα).**

ii) $\overrightarrow{BM}=3\overrightarrow{M\Gamma}\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}=3(\overrightarrow{A\Gamma}-\overrightarrow{AM})\Leftrightarrow\vec{x}-\vec{\beta}=3(\vec{\gamma}-\vec{x})\Leftrightarrow\vec{x}-\vec{\beta}=3\vec{\gamma}-3\vec{x}$

$$\Leftrightarrow 4\vec{x}=\vec{\beta}+3\vec{\gamma}\quad\Leftrightarrow\quad\vec{x}=\frac{\vec{\beta}+3\vec{\gamma}}{4}$$

5. Αν Μ , Ν τα μέσα των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ ενός τετραπλεύρου ΑΒΓΔ , να δείξετε ότι $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} = 2\overrightarrow{MN}$.

Λύση



$$\left.\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}\\ \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{M\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} + \overrightarrow{\Delta N}\end{aligned}\right\} (+)$$

$$2\overrightarrow{MN} = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{M\Gamma}) + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma\Delta}) + (\overrightarrow{BN} + \overrightarrow{\Delta N})$$

$2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ ΄΄γιατί $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{M\Gamma} = \vec{0}$ αφού Μ μέσο ΑΓ

$\overrightarrow{BN} + \overrightarrow{\Delta N} = \vec{0}$ αφού Ν μέσο ΒΔ΄΄

6. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και α,β,γ $\in$ R με α + β + γ = 0. Να δείξετε ότι για τυχαίο σημείο Μ του χώρου το διάνυσμα $\vec{v} = \alpha\cdot\overrightarrow{MA} + \beta\cdot\overrightarrow{MB} + \gamma\cdot\overrightarrow{M\Gamma}$ είναι σταθερό , δηλ. ανεξάρτητο από τη θέση του σημείου Μ.

Λύση

Επιλέγουμε το Α ως σημείο αναφοράς . Τότε :

$\vec{v} = \alpha\cdot\overrightarrow{MA} + \beta\cdot\overrightarrow{MB} + \gamma\cdot\overrightarrow{M\Gamma} = \alpha\cdot\overrightarrow{MA} + \beta(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) + \gamma(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{A\Gamma}) =$

$= \alpha\cdot\overrightarrow{MA} + \beta\cdot\overrightarrow{MA} + \beta\cdot\overrightarrow{AB} + \gamma\cdot\overrightarrow{MA} + \gamma\cdot\overrightarrow{A\Gamma} = (\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MA} + \beta\cdot\overrightarrow{AB} + \gamma\cdot\overrightarrow{A\Gamma} = \beta\cdot\overrightarrow{AB} + \gamma\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$

Άρα $\vec{v} = \beta\cdot\overrightarrow{AB} + \gamma\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$ (γραμμικός συνδυασμός των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$) δηλ. το $\vec{v}$ ανεξάρτητο του Μ (σταθερό).

7.Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha} + 4\vec{\beta}$, $\overrightarrow{OB} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$, $\overrightarrow{O\Gamma} = 4\vec{\alpha} - 11\vec{\beta}$. Να δείξετε ότι τα σημεία Α , Β και Γ είναι συνευθειακά .

Λύση

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta} - (\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}) = \vec{\alpha} - 5\vec{\beta}$

και $\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{O\Gamma} - \overrightarrow{OA} = 4\vec{\alpha} - 11\vec{\beta} - (\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}) = 3\vec{\alpha} - 15\vec{\beta} = 3(\vec{\alpha} - 5\vec{\beta})$

Παρατηρούμε ότι $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{A\Gamma} = 3\,\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{A\Gamma} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AB}\\ \text{επειδή Α κοινό σημείο}\end{array}\right\}$ Α,Β,Γ συνευθειακά .

8. Δίνονται οι αριθμοί κ,λ,μ με $|\kappa|+|\lambda|+|\mu|\neq 0$ και κ + λ+ μ = 0. Αν $\kappa\cdot\overrightarrow{OA}+\lambda\cdot\overrightarrow{OB}+\mu\cdot\overrightarrow{O\Gamma}=\vec{0}$, να δείξετε ότι τα σημεία Α,Β,Γ είναι συνευθειακά.

Λύση

Είναι κ + λ + μ = 0 $\Leftrightarrow$ μ = - κ – λ. Έτσι

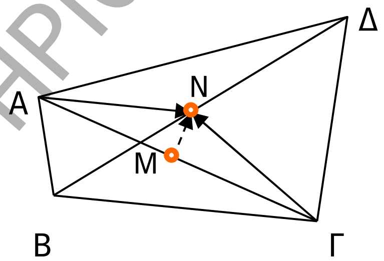
$$\kappa\cdot\overrightarrow{OA}+\lambda\cdot\overrightarrow{OB}+\mu\cdot\overrightarrow{O\Gamma}=\vec{0}\Leftrightarrow \kappa\cdot\overrightarrow{OA}+\lambda\cdot\overrightarrow{OB}+(-\kappa-\lambda)\,\overrightarrow{O\Gamma}=\vec{0}\Leftrightarrow$$

$$\kappa\cdot\overrightarrow{OA}+\lambda\cdot\overrightarrow{OB}-\kappa\cdot\overrightarrow{O\Gamma}-\lambda\,\overrightarrow{O\Gamma}=\vec{0}\Leftrightarrow \kappa\,(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{O\Gamma})+\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{O\Gamma})=\vec{0}\Leftrightarrow \kappa\,\overrightarrow{\Gamma A}+\lambda\,\overrightarrow{\Gamma B}=\vec{0}$$

$$\left.\begin{array}{r}\kappa\,\overrightarrow{\Gamma A}=-\lambda\,\overrightarrow{\Gamma B}\ \text{ για } \kappa\neq 0\ \ \overrightarrow{\Gamma A}=-\dfrac{\lambda}{\kappa}\overrightarrow{\Gamma B}\Leftrightarrow\overrightarrow{\Gamma A}\,//\,\overrightarrow{\Gamma B}\\ \text{Γ κοινό σημείο}\end{array}\right\}\ \text{άρα Α,Β,Γ συνευθειακά}$$

9. Σε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ ονομάζουμε Μ,Ν τα μέσα των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα .
Να δείξετε ότι : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{\Gamma B}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}=4\overrightarrow{MN}$.

Λύση



Επειδή Ν μέσο ΒΔ παίρνουμε $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Delta}=2\overrightarrow{AN}$ στο $\widehat{AB\Delta}$

και $\overrightarrow{\Gamma B}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}=2\overrightarrow{\Gamma N}$ στο $\widehat{B\Gamma\Delta}$

Με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε :

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{\Gamma B}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}=2\overrightarrow{AN}+2\overrightarrow{\Gamma N}=-2\overrightarrow{NA}-2\overrightarrow{\Gamma N}=-2\,(\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{\Gamma N})\ \ (1)$$

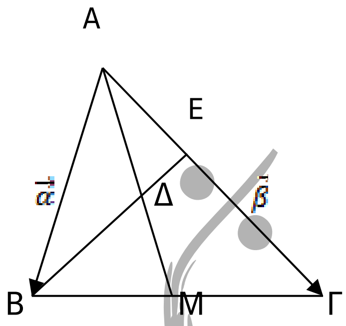
Όμως το Μ μέσο της ΑΓ οπότε στο $\widehat{AN\Gamma}$ ισχύει : $\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{\Gamma N}=2\overrightarrow{NM}$ (2)

Η (1) λόγω της (2) δίνει $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{\Gamma B}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}=-2\,(2\overrightarrow{NM})=-4\overrightarrow{NM}=4\overrightarrow{MN}$.

10. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ , η διάμεσος του ΑΜ , το μέσον Δ της ΑΜ και σημείο Ε για το οποίο ισχύει η σχέση $\overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{A\Gamma}$.

i) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{BE}$ και $\overrightarrow{B\Delta}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\overrightarrow{AB}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=\vec{\beta}$.
ii) Να δείξετε ότι τα σημεία Β , Δ και Ε είναι συνευθειακά.

Λύση



i) $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{A\Gamma} = -\vec{\alpha} + \frac{1}{3}\vec{\beta}$.

$\overrightarrow{B\Delta} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{A\Delta} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AM} =$

$= -\vec{\alpha} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma}) =$

$= -\vec{\alpha} + \frac{1}{4}(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = -\vec{\alpha} + \frac{\vec{\alpha}}{4} + \frac{\vec{\beta}}{4} =$

$= -\frac{3}{4}\vec{\alpha} + \frac{1}{4}\vec{\beta}$.

ii) είναι $\overrightarrow{B\Delta} = -\frac{3}{4}\vec{\alpha} + \frac{1}{4}\vec{\beta} = \frac{3}{4}(-\vec{\alpha} + \frac{1}{3}\vec{\beta}) = \frac{3}{4}\overrightarrow{BE}$

επομένως $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{B\Delta} \uparrow\uparrow \overrightarrow{BE} \\ \text{B κοινό}\end{array}\right\}$ Β , Δ , Ε συνευθειακά.

11. Θεωρούμε τα μη μηδενικά και μη παράλληλα ανά δύο διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$. Αν ισχύουν $\vec{\alpha} // (\vec{\beta} + \vec{\gamma})$ και $\vec{\beta} // (\vec{\gamma} + \vec{\alpha})$, να δείξετε ότι $\vec{\gamma} // (\vec{\alpha} + \vec{\beta})$.

Λύση

$\vec{\alpha} // (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) \Leftrightarrow$ υπάρχει $\lambda \in R$ ώστε $\vec{\beta} + \vec{\gamma} = \lambda\vec{\alpha}$ (1)

$\vec{\beta} // (\vec{\gamma} + \vec{\alpha}) \Leftrightarrow$ υπάρχει $\kappa \in R$ ώστε $\vec{\gamma} + \vec{\alpha} = \kappa\vec{\beta}$ (2)

Με αφαίρεση κατά μέλη (1) – (2) παίρνουμε

$\vec{\beta} - \vec{\alpha} = \lambda\vec{\alpha} - \kappa\vec{\beta} \Leftrightarrow (\lambda+1)\vec{\alpha} + (-\kappa-1)\vec{\beta} = \vec{0}$ (3)

Επειδή $\vec{\alpha} \nparallel \vec{\beta}$ ισχύει $\lambda + 1 = 0$ και $-\kappa - 1 = 0$

$\lambda = -1$ και $\kappa = -1$

έτσι (1) $\Rightarrow \vec{\beta} + \vec{\gamma} = -\vec{\alpha} \Leftrightarrow \vec{\gamma} = -\vec{\alpha} - \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\gamma} = -(\vec{\alpha} + \vec{\beta})$ άρα $\vec{\gamma} // (\vec{\alpha} + \vec{\beta})$.

12. Δίνονται τρία διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ ώστε $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 5$ και $|\vec{\gamma}| = 4$. Να δείξετε ότι :

i) $3 \le |\vec{\alpha}+\vec{\beta}| \le 7$, ii) $\vec{\alpha} + \vec{\beta} - 2\vec{\gamma} \ne \vec{0}$

Λύση

i) από τριγωνική ανισότητα $\left||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\right| \le |\vec{\alpha}+\vec{\beta}| \le |\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}| \Leftrightarrow$

$$|2-5| \le |\vec{\alpha}+\vec{\beta}| \le 2+5 \Leftrightarrow$$

$$3 \le |\vec{\alpha}+\vec{\beta}| \le 7.$$

ii) έστω $\vec{\alpha} + \vec{\beta} - 2\vec{\gamma} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{\alpha} + \vec{\beta} = 2\vec{\gamma}$

άρα $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| = |2\vec{\gamma}| = 2|\vec{\gamma}| = 8$ άτοπο γιατί $3 \le |\vec{\alpha}+\vec{\beta}| \le 7$

επομένως $\vec{\alpha} + \vec{\beta} - 2\vec{\gamma} \ne \vec{0}$

13. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσος ΑΔ.

(i) Να δείξετε ότι για κάθε σημείο Μ του επιπέδου ισχύει η σχέση $2\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{M\Gamma} = 4\vec{ME}$, όπου Ε μέσο του ΑΔ.

(ii) Βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει η σχέση :

α) $|2\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{M\Gamma}| = 4$, β) $|2\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{M\Gamma}| = |4\vec{MA}|$, γ) $(2\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{M\Gamma}) \perp \vec{B\Gamma}$

Λύση

i) Για κάθε σημείο Μ ισχύει $\vec{MB} + \vec{M\Gamma} = 2\vec{M\Delta}$

είναι : $2\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{M\Gamma} = 2\vec{MA} + 2\vec{M\Delta} = 2(\vec{MA} + \vec{M\Delta})$

όμως Ε μέσο ΑΔ άρα $\vec{MA} + \vec{M\Delta} = 2\vec{ME}$

έτσι $2\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{M\Gamma} = 4\vec{ME}$.

ii) α) $\left|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{M\Gamma}\right| = 4 \Leftrightarrow \left|4\overrightarrow{ME}\right| = 4 \Leftrightarrow 4\left|\overrightarrow{ME}\right| = 4 \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{ME}\right| = 1$

άρα ο γεωμετρικός τόπος είναι κύκλος κέντρου Ε και ακτίνας ρ = 1.

β) $\left|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{M\Gamma}\right| = \left|4\overrightarrow{MA}\right| \Leftrightarrow \left|4\overrightarrow{ME}\right| = \left|4\overrightarrow{MA}\right| \Leftrightarrow 4\left|\overrightarrow{ME}\right| = 4\left|\overrightarrow{MA}\right| \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{ME}\right| = \left|\overrightarrow{MA}\right|$

άρα ο γεωμετρικός τόπος είναι η μεσοκάθετος ευθεία του τμήματος ΑΕ.

γ) $(2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{M\Gamma}) \perp \overrightarrow{B\Gamma} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{ME} \perp \overrightarrow{B\Gamma} \Leftrightarrow \overrightarrow{ME} \perp \overrightarrow{B\Gamma}$

άρα ο γεωμετρικός τόπος είναι η ευθεία που διέρχεται από το Ε και είναι κάθετη στη ΒΓ.

14. Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in R$ ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2\lambda^2-\lambda+3, \lambda^2-1)$ και $\vec{\beta} = (\lambda^2+2\lambda+1, \lambda+1)$ να είναι ίσα.

Λύση

Για να είναι ίσα πρέπει οι αντίστοιχες συντεταγμένες τους να είναι ίσες , δηλ.

$$\left.\begin{array}{l} 2\lambda^2-\lambda+3 = \lambda^2+2\lambda+1 \\ \lambda^2-1 = \lambda+1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \lambda^2-3\lambda+2=0 \\ \lambda^2-\lambda-2=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \lambda=1 \text{ ή } \lambda=2 \\ \lambda=-1 \text{ ή } \lambda=2 \end{array}$$

παίρνω την κοινή λύση δηλ. **λ = 2**

15. Δίνονται τα $\vec{\alpha} = (2,1)$ και $\vec{\beta} = (-3,4)$. Βρείτε τις συντεταγμένες των : i) $\vec{u} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$, ii) $\vec{v} = 5\vec{\alpha} - \vec{\beta}$, iii) $\vec{w} = 4\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$.

Λύση

i) $\vec{u} = \vec{\alpha} + \vec{\beta} = (2,1) + (-3,4) = (2-3, 1+4) = (-1, 5)$

ii) $\vec{v} = 5\vec{\alpha} - \vec{\beta} = 5\cdot(2,1) - (-3,4) = (10, 5) - (-3,4) = (10+3, 5-4) = (13, 1)$

iii) $\vec{w} = 4\vec{\alpha} + 2\vec{\beta} = 4\cdot(2,1) + 2\cdot(-3,4) = (8,4) + (-6,8) = (8-6, 4+8) = (2, 12)$

16. Να γραφτεί το διάνυσμα $\vec{v} = (4\ ,\ 13)$ ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{\alpha} = (2,3)$ και $\vec{\beta} = (-1,2)$.

Λύση

Αρκεί να βρεθούν λ , $\mu \in R$ ώστε $\vec{v} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta}$.

$\vec{v} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta} \Leftrightarrow (4\ ,\ 13) = \lambda\cdot(2,3) + \mu\cdot(-1,2) \Leftrightarrow (4\ ,13) = (2\lambda\ ,\ 3\lambda\ ) + (\ -\mu\ ,\ 2\mu\ ) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (4\ ,13) = (2\lambda - \mu\ ,\ 3\lambda + 2\mu\ )$ άρα

$$\left.\begin{aligned} 2\lambda - \mu &= 4 \\ 3\lambda + 2\mu &= 13 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \quad \lambda = 3 \text{ και } \mu = 2 \text{ άρα } \vec{v} = 3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$$

17. Δίνεται το σημείο Α(4,3) και το διάνυσμα $\overrightarrow{AB} = (1,2)$. Βρείτε :

i) τις συντεταγμένες του Β

ii) τις συντεταγμένες διανύσματος $\vec{u} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{BA}$, όπου Ο αρχή των αξόνων

iii) το μέτρο του $\vec{u}$.

Λύση

i) Έστω Β(x,y) . Έχω $\overrightarrow{AB} = (1,2) \Leftrightarrow (x-4\ ,\ y-3\ ) = (1,2) \Leftrightarrow$

$$\left.\begin{aligned} x-4 &= 1 \\ y-3 &= 2 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} x &= 5 \\ y &= 5 \end{aligned} \quad \text{άρα } B(5,5)$$

ii) $\vec{u} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{BA} = (4,3) + 2(-1\ ,\ -2) = (\ 2\ ,\ -1)$

iii) $\left|\vec{u}\right| = \sqrt{2^2+(-1)^2} = \sqrt{5}$

18. Οι τετμημένες δύο σημείων Α και Β είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - (\lambda^2 - 3\lambda + 2)x - 19 = 0$. Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in R$ ώστε το μέσο του τμήματος ΑΒ να έχει τετμημένη ίση με 3.

Λύση

Έστω x_1 , x_2 οι ρίζες της εξίσωσης . Τότε $x_1 + x_2 = \lambda^2 - 3\lambda + 2$ (γιατί $x_1 + x_2 = S = -\dfrac{\beta}{\alpha}$)

Το μέσο του τμήματος ΑΒ έχει τετμημένη $\dfrac{x_1+x_2}{2} = 3 \Leftrightarrow$

$x_1 + x_2 = 6 \Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 6 \Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1$ ή $\lambda = 4$.

19. Δίνονται τα σημεία Α(1,3) , Β(6,8) και Δ (-2,2). Να βρεθεί το Γ ώστε το ΑΒΓΔ να είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση

Ά τρόπος : Για να είναι το ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο αρκεί $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Delta\Gamma}$.

Έστω Γ (x , y) , τότε $\overrightarrow{AB} = (6-1\ ,\ 8-3) = (5\ ,\ 5)$

$\overrightarrow{\Delta\Gamma} = (x+2\ ,\ y-2)$

Είναι $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow (x+2\ ,\ y-2) = (5\ ,\ 5) \Leftrightarrow \begin{cases} x+2=5 \\ y-2=5 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3\ ,\ y = 7$

Άρα Γ (3 , 7).

Β́ τρόπος : Το κέντρο Μ του παραλληλογράμμου (μέσο της ΒΔ) είναι

$M\left(\frac{6-2}{2},\frac{8+2}{2}\right)$ δηλ. Μ (2,5). Αν Γ(x , y) τότε

$\frac{x+1}{2} = 2$ και $\frac{y+3}{2} = 5$.

Άρα x = 3 και y = 7 οπότε Γ (3 , 7).

20. Δίνεται το $\vec{u} = (4\ ,\ -3)$. Βρείτε διάνυσμα $\vec{v}$ το οποίο ειnια αντίρροπο του $\vec{u}$ και έχει μέτρο 10.

Λύση

Ά τρόπος : $\vec{v} \uparrow\downarrow \vec{u}$, $\vec{u} \neq \vec{0}$, άρα υπάρχει λ < 0 ώστε $\vec{v} = \lambda\vec{u} = \lambda(4\ ,-3) = (4\lambda\ ,-3\lambda)$

Όμως $|\vec{v}| = 10 \Rightarrow \sqrt{(4\lambda)^2+(-3\lambda)^2} = 10 \Leftrightarrow 25\lambda^2 = 100 \Leftrightarrow \lambda^2 = 4$,

Επειδή λ < ο είναι λ = -2 , επομένως $\vec{v} = (-8\ ,\ 6)$.

Β́ τρόπος : έστω $\vec{v} = (x,y)$, το $\vec{v} \uparrow\downarrow \vec{u}$ άρα $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$

Δηλ. $\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ x & y \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 4y + 3x = 0$

Επίσης $|\vec{v}| = 10 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 100$

$\left.\begin{matrix} \\ \end{matrix}\right\}$ x = 8 ή x = - 8, y = - 6 ή y = 6

Δηλ. $(x,y) = 2\vec{u}$ ή $(x,y) = -2\vec{u}$ Επειδή $\vec{v} \uparrow\downarrow \vec{u}$ άρα $\vec{v} = (-8\ ,\ 6)$.

21. i) Να βρεθεί το συμμετρικό Α΄ του σημείου Α(3,2) ως προς το κέντρο συμμετρίας Β(-1,4).
ii) Αν Γ(κ,5) να βρεθεί το κ ώστε τα σημεία Α , Α΄ και Γ να είναι συνευθειακά.

Λύση

i) Έστω Α΄(x,y) το συμμετρικό του Α ως προς Β. Τότε το Β είναι το μέσο του ΑΑ΄ και ισχύει

$$\left.\begin{aligned} -1 = \frac{3+x}{2} &\Leftrightarrow 3 + x = -2 \Leftrightarrow x = -5 \\ 4 = \frac{2+y}{2} &\Leftrightarrow 2 + y = 8 \Leftrightarrow y = 6 \end{aligned}\right\} \text{ άρα } A΄(-5,6)$$

ii) Αφού Α , Α΄ , Γ είναι συνευθειακά ισχύει

$$\overrightarrow{AA΄} \,//\, \overrightarrow{A\Gamma} \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AA΄}, \overrightarrow{A\Gamma}) = 0 \quad (1)$$

Επειδή $\overrightarrow{AA΄} = (-8,4)$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = (\kappa-3,3)$

η (1) $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -8 & 4 \\ \kappa-3 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -24 - 4\kappa + 12 = 0 \Leftrightarrow \kappa = -3$

22. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x + y\ ,\ y^2 - y - x + 1)$ και $\vec{\beta} = (-2\ , x - y\ )$. Να βρεθούν τα $x,y \in R$ ώστε τα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ να είναι συγγραμμικά.

Λύση

$$\vec{\alpha} \,//\, \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+y & y^2-y-x+1 \\ -2 & x-y \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x+y)(x-y) + 2(y^2-y-x+1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2y^2 - 2y - 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ και } y = 1$$

23. Δίνονται τα σημεία Α(0,3) , Β(0,1) και Γ(1,4).
i) Να δείξετε ότι τα σημεία Α,Β,Γ αποτελούν κορυφές τριγώνου.
ii) Βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου Κ του περιγεγραμμένου κύκλου του ΑΒΓ.

Λύση

« Τρία σημεία αποτελούν κορυφές τριγώνου αν και μόνο αν δεν είναι συνευθειακά »

i) Είναι $\overrightarrow{AB} = (0,2)$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = (1,1)$

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}) = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 2 = 2 \neq 0$$

Άρα τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ δεν είναι παράλληλα και συνεπώς τα Α , Β , Γ δεν είναι συνευθειακά. Δηλ. τα Α,Β,Γ αποτελούν κορυφές τριγώνου.

ii) Έστω Κ(x,y). Έχουμε (ΚΑ) = (ΚΒ) = (ΚΓ) δηλ.

$$\left.\begin{aligned} (KA) &= (KB) \\ (KB) &= (K\Gamma) \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \sqrt{(x-0)^2+(y-3)^2} &= \sqrt{(x-0)^2+(y-1)^2} \\ \sqrt{(x-0)^2+(y-1)^2} &= \sqrt{(x-1)^2+(y-4)^2} \end{aligned} \quad \left\}\begin{aligned} x^2+y^2-6y+9 &= x^2+y^2-2y+1 \\ x^2+y^2-2y+1 &= x^2-2x+1+y^2-8y+16 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} -4y &= -8 \\ 2x+6y &= 16 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} y &= 2 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Άρα Κ (2,2)

24. Σε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι Α(-3, -1) , Β(-5 , -3) , Γ(-4 , 7) και Δ(-2 , 3)
i) Να δείξετε ότι οι ευθείες ΑΒ και ΓΔ τέμνονται.
ii) Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου τομής Ρ των ΑΒ,ΓΔ

Λύση

i) είναι $\overrightarrow{AB} = (-5+3, -3+1) = (-2, -2)$

$\overrightarrow{\Delta\Gamma} = (-4+2, 7-3) = (-2, 4)$

Επειδή $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{\Delta\Gamma}) = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -8 - 4 = -12 \neq 0$

Είναι $\overrightarrow{AB} \nparallel \overrightarrow{\Delta\Gamma}$ άρα οι ευθείες ΑΒ και ΓΔ τέμνονται.

ii) Έστω Ρ(x,y) τότε $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AP} \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AP}) = 0$ όπου $\overrightarrow{AB} = (-2, -2)$ και $\overrightarrow{AP} = (x+3, y+1)$

έτσι $\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ x+3 & y+1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x - y = -2$ (1) και $\overrightarrow{\Delta\Gamma} \parallel \overrightarrow{\Delta P} \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{\Delta\Gamma}, \overrightarrow{\Delta P}) = 0$

όπου $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = (-2, 4)$ και $\overrightarrow{\Delta P} = (x+2, y-3)$, έτσι $\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ x+2 & y-3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2x + y = -1$ (2)

από (1) και (2) $\left\{\begin{aligned} x-y &= -2 \\ 2x+y &= -1 \end{aligned}\right\}$ x = -1 , y = 1 άρα Ρ (-1,1) .

25. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με Α (x_1,y_1) , Β (x_2,y_2) και Γ (x_3,y_3) έτσι ώστε $x_2 - x_1 = x_3 - x_2$. Αν λ_1 , λ_2 , λ_3 οι συντελεστές διεύθυνσης των $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$ αντίστοιχα , να δείξετε ότι $\lambda_1 + \lambda_2 = 2\lambda_3$.

Λύση

$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1 , y_2 - y_1)$ με $\lambda_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$\overrightarrow{B\Gamma} = (x_3 - x_2 , y_3 - y_2)$ με $\lambda_2 = \dfrac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$

$\overrightarrow{A\Gamma} = (x_3 - x_1 , y_3 - y_1)$ με $\lambda_3 = \dfrac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}$

τότε $\quad \lambda_1 + \lambda_2 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} + \dfrac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \dfrac{y_2 - y_1 + y_3 - y_2}{x_2 - x_1} = \dfrac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}$ (1)

όμως $\quad x_2 - x_1 = x_3 - x_2 \Leftrightarrow 2x_2 = x_1 + x_3 \Leftrightarrow x_2 = \dfrac{x_1 + x_3}{2}$ (2)

η (1) λόγω της (2) γίνεται : $\quad \lambda_1 + \lambda_2 = \dfrac{y_3 - y_1}{\frac{x_1 + x_3}{2} - x_1} = \dfrac{y_3 - y_1}{\frac{x_3 - x_1}{2}} = 2\,\dfrac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = 2\lambda_3$

26. Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (\sqrt{3}\mu\, , \mu^2 + \mu - 3)$ όπου $\mu \in R$.

i) Βρείτε τις τιμές του μ για τις οποίες το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ έχει $\lambda = \sqrt{3}$

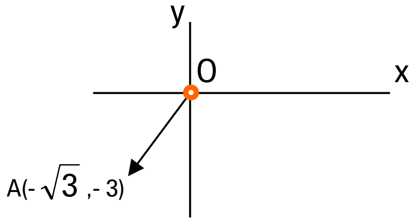
ii) Για τις τιμές του μ που βρήκατε στο i) παραστήστε το $\vec{\alpha}$ στο επίπεδο.

iii) Βρείτε την τιμή του μ για την οποία το $\vec{\alpha}$ σχηματίζει με τον xx΄ γωνία $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$

Λύση

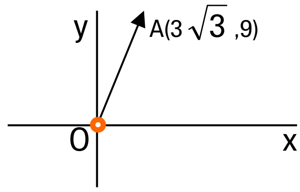
i) $\lambda = \sqrt{3} \Leftrightarrow \dfrac{\mu^2 + \mu - 3}{\sqrt{3}\mu} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \mu^2 + \mu - 3 = 3\mu \Leftrightarrow \mu^2 - 2\mu - 3 = 0 \Leftrightarrow \mu = -1$ ή $\mu = 3$.

ii) ✓ για $\mu = -1 \quad \vec{\alpha} = (-\sqrt{3} , -3)$ δηλ.



$\vec{\alpha} = \overrightarrow{OA} = (-\sqrt{3} , -3)$ όπου $A(-\sqrt{3} , -3)$

✓ για $\mu = 3 \quad \vec{\alpha} = (3\sqrt{3} , 9)$ δηλ.



$\vec{\alpha} = \overrightarrow{OA} = (3\sqrt{3} , 9)$ όπου $A(3\sqrt{3} , 9)$

iii) $\varphi = \frac{\pi}{3}$, άρα εφφ = $\varepsilon\varphi\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ δηλ. $\lambda = \sqrt{3} \Leftrightarrow \mu = -1$ ή $\mu = 3$

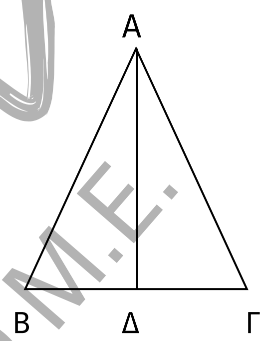
για $\mu = -1$ $\pi < \varphi < \frac{3\pi}{2}$ ενώ

για $\mu = 3$ $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ από (ii) , άρα $\varphi = \frac{\pi}{3}$ αν και μόνο αν $\mu = 3$.

27. Έστω ΑΔ το ύψος ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΓ με πλευρά α = 4. Να υπολογιστούν :

i) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}$, ii) $\overrightarrow{A\Gamma}\cdot\overrightarrow{\Delta A}$

Λύση



i) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{B\Gamma} = -\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{B\Gamma} = -\left|\overrightarrow{BA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|\sigma\upsilon\nu(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{B\Gamma}})$

$= -4\cdot4\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} = -16\cdot\frac{1}{2} = -8$

ii) $\overrightarrow{A\Gamma}\cdot\overrightarrow{\Delta A} = -\overrightarrow{A\Gamma}\cdot\overrightarrow{A\Delta} = -\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|\cdot\left|\overrightarrow{A\Delta}\right|\sigma\upsilon\nu(\widehat{\overrightarrow{A\Gamma},\overrightarrow{A\Delta}})$

$= -4\cdot4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} = -12$ (γιατί $A\Delta = \frac{A\Gamma\cdot\sqrt{3}}{2}$)

28. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 3$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = \frac{2\pi}{3}$. Να βρεθεί το μέτρο του

$\vec{\gamma} = 3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$

Λύση

$|\vec{\gamma}|^2 = \vec{\gamma}^2 = (3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta})^2 = 9\vec{\alpha}^2 + 12\vec{\alpha}\vec{\beta} + 4\vec{\beta}^2 = 9|\vec{\alpha}|^2 + 12|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) + 4|\vec{\beta}|^2 =$

$= 9\cdot4 + 12\cdot2\cdot3\left(-\frac{1}{2}\right) + 4\cdot9 = 36$ άρα $|\vec{\gamma}| = 6$.

29. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2,-5)$ και $\vec{\beta} = (7,2)$. Βρείτε :

i) τα $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ και $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})(3\vec{\alpha} - 2\vec{\beta})$

ii) τον $\kappa \in R$ για τον οποίο τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\alpha} + \kappa\vec{\beta}$ είναι κάθετα μεταξύ τους.

Λύση

i) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 2\cdot 7 + (-5)\cdot 2 = 14 - 10 = 4$

$\vec{\alpha}+\vec{\beta} = (2\ ,\ -5) + (7\ ,\ 2) = (9\ ,\ -3)$

$3\vec{\alpha} - 2\vec{\beta} = 3\cdot(2\ ,\ -5) - 2(7\ ,\ 2) = (6\ ,\ -15) - (14\ ,\ 4) = (-8\ ,\ -19)$

Άρα $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})(3\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}) = 9\cdot(-8) + (-3)(-19) = -15$

ii) $\vec{\alpha}+\kappa\vec{\beta} = (2\ ,\ -5) + \kappa(7\ ,\ 2) = (7\kappa+2\ ,\ 2\kappa-5)$

$\vec{\alpha} \perp (\vec{\alpha}+\kappa\vec{\beta}) \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot(\vec{\alpha}+\kappa\vec{\beta}) = 0 \Leftrightarrow 2\cdot(7\kappa+2) - 5\cdot(2\kappa-5) = 0$

$\Leftrightarrow 14\kappa + 4 - 10\kappa + 25 = 0 \Leftrightarrow \kappa = -\dfrac{29}{4}$

30. Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ τρία μη μηδενικά διανύσματα . Αν $\vec{\gamma} \perp (\vec{\alpha}-\vec{\beta})$ και $\vec{\beta} \perp (\vec{\gamma}-\vec{\alpha})$, να δείξετε ότι

$\vec{\alpha} \perp (\vec{\beta}-\vec{\gamma})$.

Λύση

$\vec{\gamma} \perp (\vec{\alpha}-\vec{\beta}) \Leftrightarrow \vec{\gamma}\cdot(\vec{\alpha}-\vec{\beta}) = 0 \Leftrightarrow \vec{\gamma}\vec{\alpha} - \vec{\gamma}\vec{\beta} = 0 \quad (1)$

$\vec{\beta} \perp (\vec{\gamma}-\vec{\alpha}) \Leftrightarrow \vec{\beta}\cdot(\vec{\gamma}-\vec{\alpha}) = 0 \Leftrightarrow \vec{\beta}\vec{\gamma} - \vec{\beta}\vec{\alpha} = 0 \quad (2)$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) έχουμε

$\vec{\gamma}\vec{\alpha} - \vec{\beta}\vec{\alpha} = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha}(\vec{\gamma}-\vec{\beta}) = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha} \perp (\vec{\gamma}-\vec{\beta}) \Leftrightarrow \vec{\alpha} \perp (\vec{\beta}-\vec{\gamma})$

31. Βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha} = (-2,1)$ και $\vec{\beta} = (-1,3)$.

Λύση

$συν(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = \dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|}$ όπου $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = (-2)(-1) + 1\cdot 3 = 2 + 3 = 5$

$|\vec{\alpha}| = \sqrt{(-2)^2+1^2} = \sqrt{5}$ και $|\vec{\beta}| = \sqrt{(-1)^2+3^2} = \sqrt{10}$

Άρα $συνθ = \dfrac{5}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}} = \dfrac{5}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$

$συνθ = συν\dfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow θ = 2κπ \pm \dfrac{\pi}{4}$, $κ\in Z$. Όμως $0 \le θ \le π$ άρα $\boldsymbol{θ = \dfrac{\pi}{4}}$

παν μέτρον...
άριστον
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ Μ.Ε.