

---

## Γεωμετρία Β΄ Τάξης Ημερήσιου ΓΕΛ

---

### ΔΙΔΑΚΤΕΑ ΥΛΗ-ΟΔΗΓΙΕΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ

Από το βιβλίο «Ευκλείδεια Γεωμετρία Β΄ ΓΕΛ Τεύχος Β » των. Αργυρόπουλου Η, Βλάμου Π., Κατσούλη Γ., Μαρκάκη Σ. και Σιδέρη Π.

#### Κεφ. 7ο: Αναλογίες

7.1. Εισαγωγή

7.4. Ανάλογα ευθύγραμμα τμήματα – Αναλογίες

7.5. Μήκος ευθύγραμμου τμήματος

7.6. Διαίρεση τμημάτων εσωτερικά και εξωτερικά ως προς δοσμένο λόγο (χωρίς την απόδειξη της Πρότασης και χωρίς την υποπαράγραφο “Διερεύνηση”)

7.7. Θεώρημα του Θαλή (χωρίς τις αποδείξεις των θεωρημάτων και του Πορίσματος και χωρίς τους ορισμούς «συζυγή αρμονικά» και «αρμονική τετράδα»)

7.8. Θεωρήματα των διχοτόμων τριγώνου (χωρίς τις αποδείξεις των θεωρημάτων και χωρίς τον υπολογισμό των ευθυγράμμων τμημάτων στα οποία η διχοτόμος – εσωτερική ή εξωτερική – διαιρεί την απέναντι πλευρά)

#### Κεφ. 8ο: Ομοιότητα

8.1. Όμοια ευθύγραμμα σχήματα

8.2. Κριτήρια ομοιότητας (χωρίς τις αποδείξεις των θεωρημάτων I, II και III και τις εφαρμογές 1, 2 και 3)

ΣΗΜΕΙΩΣΗ:

Να μην διδαχθούν οι αποδεικτικές ασκήσεις, τα σύνθετα θέματα και οι γενικές ασκήσεις από τα κεφάλαια 7 και 8.

#### Κεφ. 9ο: Μετρικές σχέσεις

9.1. Ορθές προβολές

9.2. Το Πυθαγόρειο θεώρημα

9.3. Γεωμετρικές κατασκευές

9.4. Γενίκευση του Πυθαγόρειου θεωρήματος ( χωρίς την εφαρμογή 2)

#### Κεφ. 10ο: Εμβαδά

10.1. Πολυγωνικά χωρία

10.2. Εμβαδόν ευθύγραμμου σχήματος - Ισοδύναμα ευθύγραμμα σχήματα

10.3. Εμβαδόν βασικών ευθύγραμμων σχημάτων

10.4. Άλλοι τύποι για το εμβαδόν τριγώνου (χωρίς την απόδειξη των τύπων I και III)

10.5. Λόγος εμβαδών όμοιων τριγώνων – πολυγώνων (χωρίς την απόδειξη του Θεωρήματος II)

### **Κεφ. 11ο: Μέτρηση Κύκλου**

11.1. Ορισμός κανονικού πολυγώνου

11.2. Ιδιότητες και στοιχεία κανονικών πολυγώνων (χωρίς τις αποδείξεις των θεωρημάτων και του Πορίσματος)

11.3. Εγγραφή βασικών κανονικών πολυγώνων σε κύκλο και στοιχεία τους (χωρίς τις εφαρμογές 2,3)

11.4. Προσέγγιση του μήκους του κύκλου με κανονικά πολύγωνα

11.5. Μήκος τόξου

11.6. Προσέγγιση του εμβαδού κύκλου με κανονικά πολύγωνα

11.7. Εμβαδόν κυκλικού τομέα και κυκλικού τμήματος

### **Κεφ. 12ο: Ευθείες και επίπεδα στο χώρο**

12.1. Εισαγωγή

12.2. Η έννοια του επιπέδου και ο καθορισμός του

12.3. Σχετικές θέσεις ευθειών και επιπέδων

12.4. Ευθείες και επίπεδα παράλληλα – Θεώρημα του Θαλή

12.5. Γωνία δύο ευθειών – Ορθογώνιες ευθείες

12.6. Απόσταση σημείου από επίπεδο – Απόσταση δύο παραλλήλων επιπέδων

## **II. Διαχείριση διδακτέας ύλης**

[Η κατανομή των διδακτικών ωρών που προτείνεται είναι ενδεικτική. Μέσα σε αυτές τις ώρες περιλαμβάνεται ο χρόνος που θα χρειαστεί για ανακεφαλαιώσεις, γραπτές δοκιμασίες, εργασίες κλπ.

Οι ενδεικτικές δραστηριότητες που περιλαμβάνονται στις παρούσες οδηγίες ως επιπλέον διδακτικό υλικό προέρχονται από το πρόγραμμα σπουδών για το λύκειο και τον οδηγό για τον εκπαιδευτικό που εκπονήθηκαν στο πλαίσιο της πράξης "Νέο Σχολείο" και μπορούν να ανακτηθούν από τον ιστότοπο του ΙΕΠ: <http://www.iep.edu.gr/neosxoleiops/index.php> ]

**Ειδικά για το σχολικό έτος 2020-21**, λόγω των ειδικών συνθηκών που διαμορφώθηκαν κατά το προηγούμενο σχολικό έτος (πανδημία Covid-19), προτείνονται τα παρακάτω:

Ο/η εκπαιδευτικός θα πρέπει να λάβει υπόψη του ότι θα χρειαστεί να αφιερώσει εύλογο χρόνο ώστε να καλύψει έννοιες και κενά των μαθητών/τριών του που έχουν πιθανόν προκύψει από το προηγούμενο σχολικό έτος. Για τη Γεωμετρία της Β' Λυκείου, επειδή αποτελεί συνέχεια της Γεωμετρίας της Α' Λυκείου, η σειρά διδασκαλίας είναι προκαθορισμένη (με βάση τα δύο τεύχη του σχολικού βιβλίου), αν και η έμφαση που δίνεται σε κάθε κεφάλαιο μπορεί να διαφέρει.

Γενικά, είναι περισσότερο πιθανό να υπάρχει τέτοια ανάγκη στη Β Λυκείου να διδαχτούν επιπλέον (από την ύλη της Α'):

- το κεφάλαιο των παραλληλογράμμων - τραπεζίων
- το κεφάλαιο των εγγεγραμμένων σχημάτων

Τα κεφάλαια αυτά προτείνεται να διδαχτούν συνοπτικά στην αρχή του σχολικού έτους. Βέβαια, η απόφαση να γίνουν τέτοιες παρεμβάσεις από τον εκπαιδευτικό θα πρέπει να συναρτηθεί από το αν οι μαθητές/τριες διδάχτηκαν στην προηγούμενη τάξη (Α' Λυκείου) τις αντίστοιχες ενότητες και πώς.

Κατά τα λοιπά, ισχύουν οι παρακάτω οδηγίες (οι οποίες ταυτίζονται με εκείνες του σχολικού έτους 2019-20) με τις προσαρμογές που θα κάνει ο/η εκπαιδευτικός σύμφωνα με τα προαναφερθέντα.

## Κεφάλαιο 7ο

---

(Προτείνεται να διατεθούν 5 διδακτικές ώρες).

Στις παραγράφους αυτές γίνεται πρώτη φορά λόγος για σύμμετρα και ασύμμετρα ευθύγραμμα τμήματα. Η έννοια της ασυμμετρίας μπορεί να βοηθήσει σημαντικά τους μαθητές να ξεκαθαρίσουν την έννοια του αρρήτου αριθμού.

Επίσης, στόχοι της διδασκαλίας, της παραγράφου είναι:

- Να γίνει σύντομη αναφορά στις ιδιότητες των αναλογιών και να δοθεί έμφαση στο Θεώρημα του Θαλή και στα Θεωρήματα διχοτόμων.
- Μέσω παραδειγμάτων να κατανοήσουν οι μαθητές ότι ζεύγη ευθυγράμμων τμημάτων διαφορετικών μηκών είναι δυνατόν να έχουν τον ίδιο λόγο.
- Να εφαρμόζουν το Θεώρημα του Θαλή, σε δοσμένα σχήματα, ή σε σχήματα που χρειάζεται να σχεδιαστούν βοηθητικές ευθείες. Να αναδειχθούν οι εφαρμογές του Θεωρήματος σε τρίγωνα και τραπέζια.

- Με χρήση των θεωρημάτων διχοτόμου, οι μαθητές να διαπιστώσουν τη δυνατότητα χωρισμού ευθύγραμμου τμήματος στον ίδιο λόγο με σημείο που βρίσκεται στο εσωτερικό του ή την προέκτασή του

(Προτείνεται, αν το επιτρέπει ο διαθέσιμος χρόνος, να γίνει απόδειξη του Θεωρήματος του Θαλή, για συγκεκριμένο λόγο (π.χ. 3/4) και να αναφερθεί ότι γενικεύεται σε οποιουδήποτε ρητούς.

Προτείνεται να γίνουν τα δύο προβλήματα της παραγράφου 7.7 και να δοθεί έμφαση στις ερωτήσεις κατανόησης 1-3 και στις ασκήσεις εμπέδωσης 3-7 της ως άνω παραγράφου.

#### Ενδεικτική δραστηριότητα:

Αν τα  $\alpha$ ,  $\beta$  και  $\gamma$  είναι γνωστά ευθύγραμμα τμήματα, να κατασκευάσετε το ευθύγραμμο τμήμα  $\chi$  ώστε να ισχύει  $\alpha/\beta = \gamma/\chi$

[Σχόλιο: Η παραπάνω δραστηριότητα είναι πρόβλημα που λύνεται με τη βοήθεια του Θεωρήματος του Θαλή.]

Στο Κεφάλαιο 7 δεν θα γίνουν αποδεικτικές ασκήσεις, σύνθετα θέματα καθώς και οι γενικές ασκήσεις του κεφαλαίου αυτού.

## Κεφάλαιο 8ο

---

(Προτείνεται να διατεθούν 5 διδακτικές ώρες).

Να δοθεί έμφαση στα κριτήρια ομοιότητας τριγώνων.

Στόχοι είναι οι μαθητές:

- Να κατανοήσουν τη λειτουργία κριτηρίων ομοιότητας, που όπως και τα κριτήρια ισότητας, με λιγότερες προϋποθέσεις από τον ορισμό μπορούμε να αποφανθούμε για την ομοιότητα δύο τριγώνων.
- Να συσχετίσουν την ισότητα με την ομοιότητα τριγώνων και να εντοπίσουν διαφορές.

#### Παρατηρήσεις:

- Αν υπάρχει χρόνος αρκεί να γίνει η απόδειξη ενός μόνο κριτηρίου ομοιότητας τριγώνων.
- Η εφαρμογή 4 της παραγράφου 8.2 θα χρειασθεί στη συνέχεια για να αποδειχθεί τύπος (iii) της παραγράφου 10.4, για το εμβαδόν τριγώνου.
- Το Κεφάλαιο προσφέρεται για τη συζήτηση εφαρμογών που ήδη θίγονται στο σχολικό βιβλίο (μέτρηση ύψους απρόσιτων σημείων, χρήση εξάντα).

#### Ενδεικτική δραστηριότητα 1:

(α) Δύο ευθύγραμμα τμήματα  $AB$  και  $\Gamma\Delta$  ή οι προεκτάσεις τους τέμνονται σε ένα σημείο  $M$  και ισχύει  $MA \cdot MB = M\Gamma \cdot M\Delta$ . Να αποδείξετε, σε κάθε περίπτωση, ότι τα σημεία  $A$ ,  $B$ ,  $\Gamma$  και  $\Delta$  είναι κορυφές εγγράψιμου τετραπλεύρου.

(β) Να εξετάσετε αν ισχύει το αντίστροφο της παραπάνω πρότασης.

### Ενδεικτική δραστηριότητα 2:

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές ΑΒ=2, ΑΓ=4 και τη γωνία Α=60°. Να κατασκευάσετε τρίγωνα όμοια προς το ΑΒΓ με λόγο ομοιότητας 1, 2 και 1/2.

Στο Κεφάλαιο 8 δεν θα γίνουν αποδεικτικές ασκήσεις, σύνθετα θέματα καθώς και οι γενικές ασκήσεις του κεφαλαίου αυτού.

### Κεφάλαιο 9ο

---

(Προτείνεται να διατεθούν 8 διδακτικές ώρες)

### **§9.1-9.3 (Προτείνεται να διατεθούν 5 διδακτικές ώρες)**

Στόχοι της διδασκαλίας είναι οι μαθητές:

- Να μπορούν να σχεδιάζουν ορθές προβολές.
- Να ερμηνεύουν τις μετρικές σχέσεις με προβολές 9.2 ως αποτέλεσμα ομοιότητας τριγώνων και να τις χρησιμοποιούν σε επίλυση προβλημάτων.
- Να εφαρμόζουν το Πυθαγόρειο Θεώρημα και το αντίστροφό του στην επίλυση προβλημάτων.

Παρατηρήσεις:

- Στις παραγράφους αυτές η άσκοπη ασκησιολογία αλγεβρικού χαρακτήρα δε συνεισφέρει στην κατανόηση της Γεωμετρίας.
- Προτείνεται να γίνει το σχόλιο της εφαρμογής ως σύνδεση με την επόμενη παράγραφο.
- Να μη γίνουν τα σύνθετα θέματα 4, 6.

Στην παράγραφο αυτή είναι σκόπιμο να διατεθεί χρόνος ώστε να σχολιαστεί το ιστορικό σημείωμα για την ανακάλυψη των ασύμμετρων μεγεθών και να γίνουν και οι 3 κατασκευές (υποτείνουσα και κάθετη πλευρά ορθογωνίου τριγώνου, μέση ανάλογος, άρρητα πολλαπλάσια ευθύγραμμου τμήματος που δίνουν και τον τρόπο κατασκευής ευθυγράμμων τμημάτων με μήκος τετραγωνική ρίζα φυσικού – αφορμή για μία σύντομη συζήτηση για τη δυνατότητα κατασκευής ή μη των αρρήτων). Επίσης μπορεί να γίνει αναφορά στην 7.3 στην οποία γίνεται λόγος για την κατασκευή αρρήτων μεγεθών.

### Ενδεικτική δραστηριότητα 1:

Να κατασκευάσετε ορθές προβολές

- α) του Ο, των ευθυγράμμων τμημάτων ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ και ΗΘ στην ευθεία ε και
- β) της ΑΒ πάνω στην ΒΓ στα δύο παρακάτω σχήματα. (...)

### Ενδεικτική δραστηριότητα 2:

Το πρόβλημα 3 προτείνεται να γίνει με πιο διερευνητικό τρόπο με το μικροπείραμα «Κατασκευή ασύμμετρων τμημάτων (Η σπείρα του Κυρηναίου)» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, για την γεωμετρική κατασκευή ασύμμετρων ευθυγράμμων τμημάτων.

<http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5636>

### Ενδεικτική δραστηριότητα 3:

(α) Να κατασκευάσετε με κανόνα και διαβήτη, τη μέση ανάλογο β, δύο εθυγράμμων τμημάτων α και γ.

(β) Να βρείτε τη σχέση του μήκους ΑΔ του ύψους ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ (με  $A=90^\circ$ ) με το γεωμετρικό μέσο των μηκών ΒΔ και ΔΓ. Ποιο στοιχείο του τριγώνου είναι ο αριθμητικός μέσος των μηκών ΒΔ και ΔΓ;

Να αποδείξετε ότι ο αριθμητικός μέσος είναι μεγαλύτερος ή ίσος του γεωμετρικού μέσου.

Πότε ισχύει η ισότητα;

[Σχετική με τις μετρικές σχέσεις της παραγράφου 9.2]

### Ενδεικτική δραστηριότητα 4:

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. Να κατασκευάσετε με κανόνα και διαβήτη τα τμήματα  $\sqrt{2}\cdot AB$  και  $\sqrt{3}\cdot AB$ .

[Σχετική με το Πυθαγόρειο Θεώρημα]

## **§9.4 (Προτείνεται να διατεθούν 3 διδακτικές ώρες).**

Στόχοι είναι οι μαθητές να χρησιμοποιούν το Γενικευμένο Πυθαγόρειο Θεώρημα για να διακρίνουν αν ένα τρίγωνο είναι οξυγώνιο, ορθογώνιο ή αμβλυγώνιο και να χρησιμοποιούν το νόμο των συνημιτόνων σε επίλυση η προβλημάτων.

Παρατηρήσεις:

- Στην παράγραφο 9.4 προτείνεται να μην αναλωθεί επιπλέον διδακτικός χρόνος για άσκοπη ασκησιολογία αλγεβρικού τύπου.
- Να μη γίνουν τα σύνθετα θέματα της παραγράφου 9.4.
- Να μη γίνουν οι γενικές ασκήσεις του Κεφαλαίου.

### Ενδεικτική δραστηριότητα:

Ένα πλοίο κινείται με κατεύθυνση από το Α προς το Σ. Από τη στιγμή που βρίσκεται στη θέση Α και μέχρι την ολοκλήρωση της πορείας του, ασκούνται σε αυτό πλαγιομετωπικοί άνεμοι που το ωθούν με δύναμη μέτρου  $F_1$  που σχηματίζει γωνία  $\omega$  με την επιθυμητή πορεία πλεύσης. Ο καπετάνιος, προκειμένου να διατηρήσει σταθερή την πορεία, δίνει εντολή να στραφεί το πηδάλιο κατά  $\varphi$  μοίρες. Αν οι προπέλες ωθούν το πλοίο με σταθερή δύναμη μέτρου  $F_1$  μπορείτε να περιγράψετε έναν τρόπο με τον οποίο μπορεί να προσδιοριστεί η γωνία  $\varphi$ ;

Κεφάλαιο 10ο

---

(Προτείνεται να διατεθούν 10 διδακτικές ώρες).

## **§10.1-10.3**

---

(Προτείνεται να διατεθούν 5 διδακτικές ώρες).

Παρατηρήσεις & στόχοι:

- Οι μαθητές να διακρίνουν τα ισοδύναμα (ισεμβαδικά) από τα ίσα σχήματα.
- Με κατάλληλους μετασχηματισμούς και χρήση βοηθητικών γραμμών οι μαθητές ναυπολογίζουν εμβαδά από άλλα ήδη γνωστά τους.
- Προτείνεται, αν υπάρχει χρόνος, να γίνουν οι 3 εφαρμογές (με την παρατήρηση τηςεφαρμογής 2) και οι 2 δραστηριότητες.
- Θα μπορούσε να γίνει η απόδειξη του Πυθαγορείου θεωρήματος μέσω εμβαδών, όπωςπαρατίθεται στα στοιχεία του Ευκλείδη και αναφέρεται στο ιστορικό σημείωμα στο τέλοςτου Κεφαλαίου.
- Προτεινόμενες ασκήσεις:  
Οι ερωτήσεις κατανόησης.  
Από τις ασκήσεις εμπέδωσης οι 3 και 6.  
Από τις αποδεικτικές ασκήσεις οι 1, 4, 7 και 8.
- Να μη γίνουν τα σύνθετα θέματα 1 και 5.

#### Ενδεικτική δραστηριότητα 1:

(α) Να χωρίσετε ένα τρίγωνο σε τέσσερα ίσα τρίγωνα φέρνοντας κατάλληλες ευθείες και στη συνέχεια να συγκρίνετε το εμβαδόν κάθε τριγώνου με το εμβαδόν του αρχικού.

(β) Να χωρίσετε ένα παραλληλόγραμμο σε

- δύο,
- τρία,
- τέσσερα ίσα παραλληλόγραμμα.

Στη συνέχεια να συγκρίνετε το εμβαδόν κάθε παραλληλογράμμου με το εμβαδόν του αρχικού παραλληλογράμμου.

(γ) Να χωρίσετε ένα τρίγωνο με ευθεία που διέρχεται από την κορυφή σε δύο τρίγωνα με λόγο εμβαδών  $1/3$

#### Ενδεικτική δραστηριότητα 2:

Η ερώτηση κατανόησης 1 προτείνεται να γίνει με πιο διερευνητικό τρόπο με το μικροπείραμα «Τύποι υπολογισμού εμβαδών» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, για την κατανόηση των τύπων των εμβαδών βασικών γεωμετρικών σχημάτων και τις αποδείξεις τους.

<http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5771>

### **§10.4 (Προτείνεται να διατεθούν 2 διδακτικές ώρες).**

Παρατηρήσεις και στόχοι:

- να γίνει απλή εφαρμογή των τύπων. Οι μαθητές να μπορούν να λύνουν απλά προβλήματαυπολογισμού εμβαδών, με αυτούς.
- Αν υπάρχει χρόνος, να γίνει η απόδειξη του τύπου (iii).
- Να εξηγηθεί ο συμβολισμός της ημιπεριμέτρου.
- Μία επιλογή ασκήσεων θα μπορούσε να είναι:  
Οι ερωτήσεις κατανόησης 1 και 2.  
Από τις ασκήσεις εμπέδωσης οι 3 και 4.  
Από τις αποδεικτικές οι 1, 3 και 5.
- Να μη γίνουν τα σύνθετα θέματα 1, 2.

### **§10.5 (Προτείνεται να διατεθούν 3 διδακτικές ώρες).**

Στόχος είναι οι μαθητές να συσχετίσουν το λόγο ομοιότητας δύο σχημάτων με το λόγο των περιμέτρων τους και το λόγο των εμβαδών τους.

Να μη γίνουν τα σύνθετα θέματα της παραγράφου 10.5.

Ενδεικτική δραστηριότητα:

- α) Να αποδείξετε το θεώρημα διχοτόμων με χρήση εμβαδών.
- β) Να αποδείξετε το Πυθαγόρειο Θεώρημα με τη βοήθεια των εμβαδών και να το γενικεύσετε με την κατασκευή εξωτερικά των πλευρών του ομοίων σχημάτων (προτείνεται η χρήση λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας).

Κεφάλαιο 11ο

---

(Προτείνεται να διατεθούν 11 διδακτικές ώρες).

### **§11.1-11.2 (Προτείνεται να διατεθούν 2 διδακτικές ώρες).**

Παρατηρήσεις:

- Στην παράγραφο 11.1 μπορεί να γίνει μία υπενθύμιση της έννοιας του κυρτού πολυγώνου και των στοιχείων του, όπως αναφέρεται στην παράγραφο 2.20 που είναι εκτός της ύλης της Α΄ Λυκείου.
- Προτείνεται να γίνει η παρατήρηση και το σχόλιο (που χρειάζονται για την επόμενη παράγραφο).
- Μπορεί να γίνει μία αναφορά στο ρόλο των κανονικών πολυγώνων στη φύση, την τέχνη και τις επιστήμες (βιβλίο καθηγητή για επέκταση της αποδεικτικής άσκησης 1 και συσχέτιση με τη διακόσμηση με κανονικά πολύγωνα).
- Να μη γίνουν τα σύνθετα θέματα.

Στόχοι είναι οι μαθητές να αναγνωρίζουν τα κανονικά πολύγωνα, να διακρίνουν τη γωνία τους, από την κεντρική τους γωνία και να μπορούν να υπολογίζουν στοιχεία κανονικών πολυγώνων. Δεν κρίνεται σκόπιμο να χρησιμοποιούν έτοιμους τους τύπους του θεωρήματος I της παραγράφου 11.2

Ενδεικτική δραστηριότητα 1:

Ο ρόμβος και το ορθογώνιο είναι κανονικά πολύγωνα; Τι πρέπει να ισχύει για να είναι;

Ενδεικτική δραστηριότητα 2:

Με το μικροπείραμα «Η εξωτερική γωνία ενός κανονικού πολυγώνου» με το οποίο οι μαθητές εμπλέκονται σε διαδικασίες κατασκευής κανονικών  $n$ -γώνων εγγεγραμμένων σε κύκλο με στόχο να ανακαλύψουν τη σχέση που συνδέει την εξωτερική γωνία του κανονικού  $n$ -γώνου με το πλήθος  $n$  των πλευρών του. Οι μαθητές εκτελούν απλές διαδικασίες σε γλώσσα Logo που δημιουργούν μια ανοικτή τεθλασμένη γραμμή με δυο κορυφές της πάνω σε κύκλο και πειραματίζονται διορθώνοντας τις αρχικές διαδικασίες, ώστε το αποτέλεσμα της εκτέλεσής τους να είναι κανονικό  $n$ -γωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο. Το μικροπείραμα έχει



δημιουργηθεί με χρήση εργαλείων συμβολικής έκφρασης μέσω του προγραμματισμού (Χελωνόκοσμος).

<http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5748>

### **§11.3 (Προτείνεται να διατεθούν 2 διδακτικές ώρες).**

#### Παρατηρήσεις:

- Βάσει του σχολίου και της παρατήρησης της προηγούμενης παραγράφου, οι μαθητές μπορούν μόνοι τους να οδηγηθούν στην εγγραφή των βασικών κανονικών πολυγώνων σε κύκλο, όπως προτείνεται και στο βιβλίο του καθηγητή.
- Προτείνεται να δοθεί έμφαση στην εφαρμογή 1 και στη συνέχεια να γίνει η δραστηριότητα 1.
- Δεν προτείνεται να γίνουν ασκήσεις αλγεβρικού τύπου με χρήση των έτοιμων τύπων του πίνακα της παραγράφου 11.3.
- Προτείνεται οι μαθητές να κατανοήσουν πώς μεταβάλλονται τα στοιχεία ενός κανονικού πολυγώνου σε δοσμένο κύκλο, όταν αυξάνεται ο αριθμός των πλευρών του (βλέπε ενδεικτική δραστηριότητα)
- Να μη γίνουν τα σύνθετα θέματα.

#### Ενδεικτική δραστηριότητα:

Σε κύκλο κέντρου  $O$  και ακτίνας  $\rho$  να εγγράψετε τετράγωνο και στη συνέχεια κανονικό οκτάγωνο. Συνεχίστε την ίδια διαδικασία με την εγγραφή δεκαεξαγώνου κ.ο.κ. Ποιος είναι ο τύπος που περιγράφει το πλήθος των πλευρών μετά από  $n$  βήματα της κατασκευής; Τι συμβαίνει με το μήκος των πλευρών;

### **§11.4, 11.5, 11.6, 11.7 (Προτείνεται να διατεθούν 7 διδακτικές ώρες).**

Να αφιερωθεί χρόνος για τη διαδικασία προσέγγισης τόσο για τον υπολογισμό του μήκους του κύκλου όσο και για τον υπολογισμό του εμβαδού του.

#### Παρατηρήσεις:

- Οι παράγραφοι αυτές μπορούν να προετοιμάσουν τους μαθητές που θα ακολουθήσουν τη θετική κατεύθυνση για την εισαγωγή στις άπειρες διαδικασίες με φυσιολογικό τρόπο, μέσω αναφοράς στην μέθοδο της εξάντλησης. Η σύνδεση μεθόδων του Αρχιμήδη με μεθόδους που χρησιμοποιήθηκαν περίπου δύο χιλιετίες μετά, στην απαρχή του απειροστικού λογισμού, έχει ευρύτερο ενδιαφέρον για όλους τους μαθητές
- Θα μπορούσαν να αναφερθούν κάποια επιπλέον στοιχεία για τον αριθμό  $\pi$ , αλλά θα πρέπει να διευκρινιστεί τι είναι αλγεβρικός και τι υπερβατικός αριθμός (για την παράγραφο 11.8).
- Να μη γίνει το σύνθετο θέμα 2.
- Προτείνεται να δοθεί έμφαση στις εφαρμογές (μηνίσκοι του Ιπποκράτη) και στη δραστηριότητα.

Στόχοι είναι οι μαθητές:

- Να περιγράφουν και να ερμηνεύουν τον τρόπο με τον οποίο προσεγγίζεται το μήκος και το εμβαδόν του κύκλου

- Να βρίσκουν το μήκος τόξου ως συνάρτηση της ακτίνας.
- Να υπολογίζουν το εμβαδόν ενός κυκλικού τομέα.
- Να χρησιμοποιούν τα παραπάνω συμπεράσματα και δεξιότητες σε προβλήματα μεμεικτόγραμμα σχήματα.

#### Ενδεικτική δραστηριότητα:

Να σχεδιάσετε κύκλο με κέντρο  $O$  και ακτίνα 4. Στη συνέχεια να κατασκευάσετε το κανονικό εγγεγραμμένο και το κανονικό περιγεγραμμένο εξάγωνο στον κύκλο.

α) Να βρείτε τις περιμέτρους των δύο εξαγώνων.

β) Τι συμπεραίνετε για το μήκος του κύκλου;

γ) Μπορείτε να βρείτε ακριβέστερο τρόπο προέγγισης του μήκους του κύκλου; Να τεκμηριώσετε την απάντησή σας με αριθμητικά αποτελέσματα.

[Σχόλια: Αυτή η δραστηριότητα είναι εισαγωγική στην παράγραφο 11.4 και μπορεί να γίνει και με τη βοήθεια λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας. Επίσης μπορεί να επεκταθεί και στην προσέγγιση εμβαδού κύκλου με κατάλληλη τροποποίηση των ερωτημάτων.]

Κεφάλαιο 12ο

---

(Να διατεθούν 11 ώρες)

### **§12.1-12.3 (Να διατεθούν 2 ώρες)**

Να γίνει μετάβαση από τις έννοιες της επίπεδης Γεωμετρίας σε αυτές της Γεωμετρίας του χώρου, για παράδειγμα: Επίπεδη γωνία (σημείο, δύο ημιευθείες) και δίεδρη γωνία (ευθεία, δύο ημιεπίπεδα) ή ακόμα τετράγωνο στο επίπεδο και κύβος στο χώρο. Να τονιστεί η διαφορά μεταξύ παραλλήλων και ασύμβατων ευθειών.

Προτείνεται:

- Να αναφερθούν με τη βοήθεια σχημάτων τα αξιώματα I, II, III και IV της παραγράφου 12.2.
- Οι προτάσεις που προκύπτουν, στην ίδια παράγραφο, να αναφερθούν επίσης, χωρίς απόδειξη ή παρουσιάζοντας ενδεικτικά την απόδειξη της πρότασης I.
- Να αναφερθούν τα αξιώματα V και VI της παραγράφου 12.3.
- Σε αυτό το σημείο μπορούν να προκύψουν μέσα από συζήτηση στην τάξη οι τυπικοί ορισμοί:  
Των παραλλήλων ευθειών (§12.2), των παραλλήλων επιπέδων, της παράλληλης ευθείας σε επίπεδο (§12.3).  
Είναι σκόπιμο οι μαθητές να προσπαθήσουν να κατασκευάσουν τους ορισμούς.
- Ο ορισμός των ασύμβατων ευθειών να δοθεί μετά την απόδειξη του θεωρήματος της §12.3.
- Να δοθούν μόνο ερωτήσεις κατανόησης και ασκήσεις εμπέδωσης (και όχι αποδεικτικές), ως εργασία για το σπίτι ή την τάξη.

#### Ενδεικτική δραστηριότητα 1:

Οι σχετικές θέσεις ευθείας και επιπέδου προτείνεται να διερευνηθούν με το μικροπείραμα

«Σχετικές θέσεις ευθείας και επιπέδου» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία.  
<http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5904>

#### Ενδεικτική δραστηριότητα 2:

Οι σχετικές θέσεις δύο επιπέδων στο χώρο προτείνεται να διερευνηθούν με το μικροπείραμα «Σχετικές θέσεις δύο επιπέδων» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία.  
<http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5905>

### **§12.4 (Να διατεθεί 2 ώρες)**

Να αναγνωρίσουν το μεσοκάθετο επίπεδο σε ευθύγραμμο τμήμα καθώς και το μεσοπαράλληλο επίπεδο ως γεωμετρικούς τόπους, κατ' αντιστοιχία με την μεσοκάθετο ευθυγράμμου τμήματος και τη μεσοπαράλληλη δυο παραλλήλων ευθειών.

Προτείνεται:

- Να αναφερθούν τα Θεωρήματα και τα πορίσματα της παραγράφου ως αποτελέσματα.
- Μπορεί, αν υπάρχει χρόνος, να γίνει η απόδειξη του Θεωρήματος IV.
- Το θεώρημα του Θαλή να μη αποδειχθεί. Αν υπάρχει χρόνος και ανάλογα με τις διδακτικές επιλογές του διδάσκοντα, μπορεί να γίνει διερευνητικά με την προτεινόμενη ενδεικτική δραστηριότητα 1.
- Να γίνει, από το διδάσκοντα, μία επιλογή μόνο από τις ασκήσεις εμπέδωσης και, αν κριθεί σκόπιμο, η άσκηση 3 από τις αποδεικτικές (βλέπε ενδεικτική δραστηριότητα 2).

#### Ενδεικτική δραστηριότητα 1:

Το θεώρημα του Θαλή προτείνεται να γίνει με πιο διερευνητικό τρόπο με το μικροπείραμα «Το θεώρημα του Θαλή σε ασύμβατες ευθείες» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, για την παραλληλία και την καθετότητα ευθειών στο χώρο και την απόδειξη του θεωρήματος του Θαλή σε ασύμβατες ευθείες.  
<http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5793>

#### Ενδεικτική δραστηριότητα 2:

Η άσκηση 3 από τις αποδεικτικές, προτείνεται να γίνει με πιο διερευνητικό τρόπο με το μικροπείραμα «Οι διαγωνίες του στρεβλού τετραπλεύρου» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, για τις ιδιότητες των διαγωνίων του στρεβλού τετραπλεύρου.  
<http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5855>

### **§12.5 (Να διατεθούν 3 ώρες)**

Σε αυτή την παράγραφο εισάγεται η νέα έννοια της γωνίας δύο ασύμβατων ευθειών, που εποπτικά σχετίζεται με την προβολή στο επίπεδο και της καθετότητας ευθείας και επιπέδου.

Οι έννοιες αυτές γενικεύουν την έννοια της γωνίας, που εδώ προσδιορίζεται από μια γωνιακή σχέση μεταξύ δύο σχημάτων του χώρου. Π.χ. οι ασύμβατες ευθείες δε σχηματίζουν 'γωνία' όπως την ξέρουν οι μαθητές, αλλά έχουν μια γωνιακή σχέση, μέσω της προβολής μιας εκ των δύο στο επίπεδο της άλλης.

Προτείνεται:

- Οι μαθητές να κάνουν εικασίες για τα εξής ερωτήματα:  
Πώς μπορούμε να ορίσουμε μια γωνία μεταξύ δύο ασύμβατων ευθειών;  
Πότε θα χαρακτηρίζαμε μία ευθεία και ένα επίπεδο κάθετα μεταξύ τους;
- Στη συνέχεια να κατασκευαστούν οι ορισμοί στην τάξη και να συγκριθούν με τους τυπικούς ορισμούς του βιβλίου.
- Να αποδειχθεί το κριτήριο καθετότητας ευθείας σε επίπεδο και το θεώρημα των τριών καθέτων.
- Να γίνει επιλογή από τις ερωτήσεις κατανόησης και τις ασκήσεις εμπέδωσης.

### §12.6 (Να διατεθούν 4 ώρες)

Στην παράγραφο 12.6 προτείνεται να δοθούν οι ορισμοί και να γίνουν οι εφαρμογές ως δραστηριότητες στην τάξη. Επίσης προτείνεται να γίνει περιορισμένος αριθμός από τις ασκήσεις εμπέδωσης, ανάλογος με την εκτίμηση και τον διδακτικό προγραμματισμό του διδάσκοντα.

Επίσης προτείνονται οι παρακάτω δραστηριότητες:

#### Ενδεικτική δραστηριότητα 1:

Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων του χώρου που απέχουν ίσες αποστάσεις από:

- α) Δύο σημεία,
- β) τρία σημεία.

#### Ενδεικτική δραστηριότητα 2:

Δίνεται γωνία  $xOy$  σε ένα επίπεδο  $\Pi$ . Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων του χώρου που απέχουν ίσες αποστάσεις από τις πλευρές της γωνίας  $xOy$

#### **Σημείωση:**

Μπορείτε να κατεβάσετε τις ψηφιακές δραστηριότητες και να τις ανοίξετε τοπικά με το αντίστοιχο λογισμικό. Αν δεν έχετε εγκατεστημένο το λογισμικό, τότε αν πρόκειται για αρχείο με κατάληξη .ggb κατεβάστε και εγκαταστήστε το Geogebra από τη διεύθυνση <https://www.geogebra.org/download> ή διαφορετικά ψάξτε για το αντίστοιχο λογισμικό στη διεύθυνση <http://photodentro.edu.gr/edusoft/>.

Για να δείτε την προεπισκόπηση των ψηφιακών δραστηριοτήτων σε απευθείας σύνδεση (online), προτιμήστε τον φυλλομετρητή Mozilla Firefox.

Αν η εφαρμογή είναι σε flash θα πρέπει να εγκαταστήσετε το πρόσθετο Adobe flash player από τη διεύθυνση <https://get.adobe.com/flashplayer/>.

Αν η εφαρμογή χρησιμοποιεί τη Java (π.χ. Geogebra), τότε εγκαταστήστε την από τη διεύθυνση <http://java.com/en/>. Αν συνεχίζετε να έχετε πρόβλημα στην προεπισκόπηση, τότε προσθέστε τις διευθύνσεις <http://photodentro.edu.gr> και <http://digitalschool.minedu.gov.gr> στο exception site list στην καρτέλα security της Java (ανοίξτε το Control Panel, τη Java, στην