ΘΕΜΑ Α

A1. Θεώρημα κ απόδειξη σελ 186 σχ. Β.

A2. Θεώρημα Fermat σελ 142 σχ. Β

A3. Ορισμός σελ 161 σχ. Β

A4. α) Σ.

β) Σ

γ) Σ

δ) Λ

ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

B1. $A_h = A_{f\circ g} = \{x\in A_g / g(x)\in A_f\} = \{x\in[0,+\infty) / \sqrt{x}\in(-\infty,1]\}$

$= \{x\geq 0 / \sqrt{x}\leq 1 \Leftrightarrow x\leq 1\} = [0,1]$

και

$h(x)=(f\circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{x}^4 - 2\sqrt{x}^2 + 1 = x^2-2x+1 = (x-1)^2.$

B2. $h'(x) = 2(x-1) \leq 0$ γιατί $x\leq 1 \Leftrightarrow x-1\leq 0$

Άρα $h\downarrow [0,1]$ επομένως είναι "1-1"

Έστω $h(x)=y \Leftrightarrow (x-1)^2=y \overset{y\geq 0}{\Leftrightarrow} \sqrt{(x-1)^2}=\sqrt{y} \Leftrightarrow |x-1|=\sqrt{y} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -x+1=\sqrt{y} \Leftrightarrow x=1-\sqrt{y}$

με $A_{h^{-1}} = h(A) = [h(1),h(0)] = [0,1]$ και $h^{-1}(x)=1-\sqrt{x}.$

B3. (i) Η φ είναι συνεχής στο $[0,1)$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων

$$\varphi(x)=\begin{cases} \dfrac{h^{-1}(x)}{1-x} = \dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}, & x\in[0,1) \\ 1/2, & x=1 \end{cases}$$

και είναι συνεχής και στο $x=1$ γιατί

$$\lim_{x\to1}\varphi(x)=\lim_{x\to1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\underset{D.L.H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to1}\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{-1}=\lim_{x\to1}\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2}=\varphi(1)$$

Άρα φ συνεχής στο $[0,1]$

και $\varphi(0)=1$, $\varphi(1)=\frac{1}{2}$ δηλ $\varphi(0)\neq\varphi(1)$

Δηλ ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών στο $[0,1]$.

(ii) Επειδή $\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{2}$, βρισκόμαστε στο 1ο τεταρτημόριο όπου η συνάρτηση ημx είναι αύξουσα

Άρα

$$\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow \eta\mu\frac{\pi}{6}<\eta\mu\alpha<\eta\mu\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2}<\eta\mu\alpha<1.$$

Από θεώρημα ενδιαμέσων τιμών για την φ $(B_3(i))$

για $\eta\mu\alpha\in\left(\frac{1}{2},1\right)=(\varphi(1),\varphi(0))$, υπάρχει ένα τουλάχιστον

$x_0\in(0,1)$ ώστε $\varphi(x_0)=\eta\mu\alpha$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Από συνέπειες του Θ.Μ.Τ. $f(x)=\begin{cases}-2x+c_1, & x<-1\\ x^3-x+c_2, & x>-1.\end{cases}$

Επειδή η f διέρχεται από το $O(0,0)$ ισχύει $f(0)=0$. Άρα $\underline{c_2=0}$

f συνεχής στο -1: $\lim_{x\to-1^-}f(x)=\lim_{x\to-1^+}f(x)=f(-1)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ 2+c_1=\cancel{-1}+\cancel{1}\Leftrightarrow \underline{c_1=-2}$

Άρα $f(x)=\begin{cases}-2x-2, & x\le -1\\ x^3-x, & x>-1.\end{cases}$

Γ2. Η εφ της C_f στο $A(x_0,f(x_0))$ είναι

$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$ για $x>-1$ $f(x)=x^3-x$
και $f'(x)=3x^2-1$.

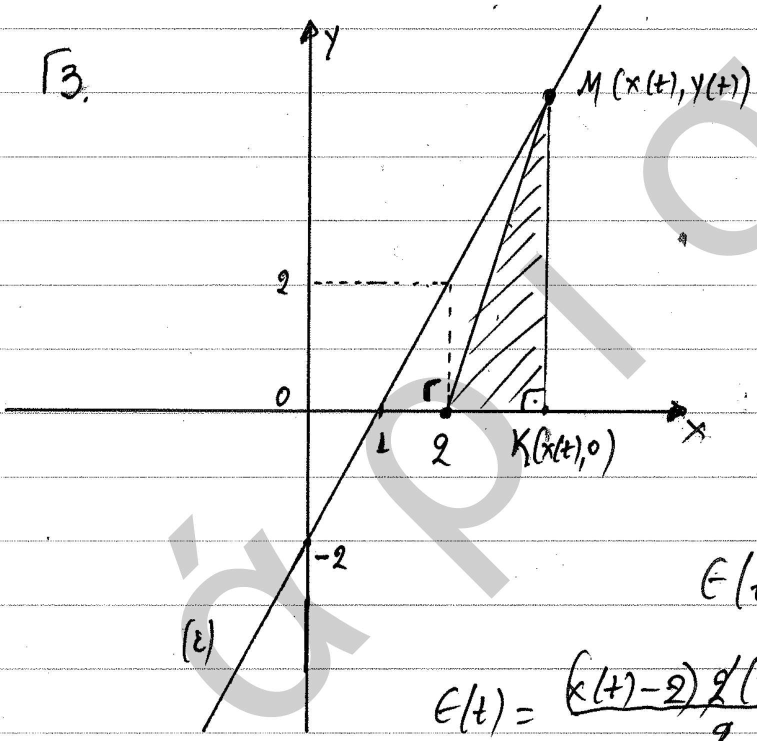
Η C_f τέμνει τον y'y στο -2 δηλ. περνά από το σημείο $(0,-2)\in$ εφ
Έτσι

$$-2-(x_0^3-x_0)=(3x_0^2-1)(-x_0) \Leftrightarrow -2-x_0^3+\cancel{x_0}=-3x_0^3+\cancel{x_0}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x_0^3=2 \Leftrightarrow x_0^3=1 \Leftrightarrow \underline{x_0=1}$$

Άρα εφ: $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-0=2(x-1)\Leftrightarrow \underline{y=2x-2}$

Γ3.



Την στιγμή t_0
$x(t_0)=3$ και $y(t_0)=4$
ενώ $x'(t)=2$ μ/sec.

Το εμβαδόν του $\overset{\triangle}{K\Gamma M}$ είναι
$E=\frac{1}{2}(K\Gamma)(KM)$ δηλ.

$$E(t)=\frac{1}{2}\left(x(t)-2\right)\cdot\left(2x(t)-2\right)\Leftrightarrow$$

$$E(t)=\frac{(x(t)-2)\cancel{2}(x(t)-1)}{\cancel{2}}=x^2(t)-3x(t)+2.$$

$E'(t)=2x(t)\cdot x'(t)-3x'(t)$ και για $t=t_0$

$$E'(t_0)=2x(t_0)x'(t_0)-3x'(t_0)=2\cdot 3\cdot 2-3\cdot 2=12-6=\underline{6\ \mu^2/sec}$$

Γ4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{ημf(x)}{f(x)}+\frac{f(-x)}{1-x^3}\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{ημf(x)}{f(x)}+\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(-x)}{1-x^3}$ (1)

όπου $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{ημf(x)}{f(x)}$, θέτω $f(x)=u \Leftrightarrow -2x-2=u \Leftrightarrow x=-\frac{u+2}{2}$

για $x\to-\infty \Leftrightarrow -\frac{u+2}{2}\to-\infty \Leftrightarrow \frac{u+2}{2}\to+\infty$ Άρα $u\to+\infty$.

Έτσι $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{ημf(x)}{f(x)}=\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{ημu}{u}$

όμως $-1\le ημu\le 1 \overset{u>0}{\Longleftrightarrow} -\frac{1}{u}\le\frac{ημu}{u}\le\frac{1}{u}$

και $\lim\limits_{u\to+\infty}\left(-\frac{1}{u}\right)=\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{1}{u}=0$

Από Κριτήριο Παρεμβολής $\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{ημu}{u}=0$. (2)

και $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(-x)}{1-x^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x-2}{1-x^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x}{-x^3}=$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{-x^2}=0$ (3)

Άρα (1) $\overset{(2)\,κ\,(3)}{\Longleftrightarrow}$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{ημf(x)}{f(x)}+\frac{f(-x)}{1-x^3}\right]=0$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. (i) $f'(x) = 1 - \frac{1}{3x}(3x)' = 1 - \frac{3}{3x} = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$

x	0		1		$+\infty$
f'		$-$		$+$	
f		$\searrow$	ο.ε.	$\nearrow$	

$f(1) = 1 - \ln 3 < 0$ (γιατί $1 - \ln 3 < 0 \Leftrightarrow 1 < \ln 3 \Leftrightarrow \ln e < \ln 3 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow e < 3$ που ισχύει)

$f \downarrow (0,1] \rightarrow f_1(A) = [f(1), \lim\limits_{x\to 0^+} f(x))$

όπου $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x - \ln(3x)) = 0 - (-\infty) = +\infty$

$\Bigg\}\ f_1(A) = [1 - \ln 3, +\infty)$

Το $0 \in f_1(A)$, $f \downarrow (0,1]$ $\Big\}$ η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς 1 λύση $x_1 \in (0,1]$

$f \uparrow [1,+\infty) \rightarrow f_2(A) = [f(1), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x))$

όπου $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x - \ln(3x)) \overset{+\infty-\infty}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} x \cdot \left(1 - \frac{\ln(3x)}{x}\right) = +\infty$

(γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(3x)}{x} \underset{D.L.H}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{3}{3x}}{1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$)

δηλ. $f_2(A) = [1 - \ln 3, +\infty)$

Το $0 \in f_2(A)$, $f \uparrow [1,+\infty)$ $\Big\}$ η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς 1 λύση $x_2 \in [1,+\infty)$

(ii) $f''(x) = \frac{(x-1)'\cdot x - (x-1)(x)'}{x^2} = \frac{x-x+1}{x^2} = \frac{1}{x^2} > 0$

Άρα f κυρτή στο $(0,+\infty)$

Δ2.

$$E=\int_{x_1}^{x_2}|f(x)|dx$$

Η f στο $[x_1,x_2]$ δεν μηδενίζεται ($f\neq 0$) και είναι συνεχής
Άρα διατηρεί πρόσημο
Είναι $x_1<1<x_2$ και $f(1)=1-\ln 3<0$
Άρα για κάθε $x\in[x_1,x_2]$ $f(x)<0$.

Άρα $E=\int_{x_1}^{x_2}(\ln(3x)-x)dx = \int_{x_1}^{x_2}\ln(3x)dx - \int_{x_1}^{x_2}x\,dx =$

$$= \int_{x_1}^{x_2}(x)'\ln(3x)dx - \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_1}^{x_2} = \left[x\ln(3x)\right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2}x\cdot\frac{1}{x}dx - \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_1}^{x_2} =$$

$$= x_2\ln(3x_2) - x_1\ln(3x_1) - \left[x\right]_{x_1}^{x_2} - \left(\frac{x_2^2}{2} - \frac{x_1^2}{2}\right) =$$

$$= x_2\ln(3x_2) - x_1\ln(3x_1) - (x_2 - x_1) - \frac{x_2^2 - x_1^2}{2}$$

Όμως $f(x_1)=0 \Leftrightarrow x_1-\ln(3x_1)=0 \Leftrightarrow \ln(3x_1)=x_1$.
και $f(x_2)=0 \Leftrightarrow x_2-\ln(3x_2)=0 \Leftrightarrow \ln(3x_2)=x_2$

Έτσι $E = x_2^2 - x_1^2 - x_2 + x_1 - \frac{x_2^2-x_1^2}{2} =$

$$= \frac{2x_2^2-2x_1^2-2x_2+2x_1-x_2^2+x_1^2}{2} = \frac{x_2^2-x_1^2-2x_2+2x_1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[(x_2-x_1)(x_2+x_1)-2(x_2-x_1)\right] = \frac{1}{2}(x_2-x_1)(x_2+x_1-2).$$

Δ3. Επειδή $E > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_2 + x_1 - 2) > 0$

Είναι $x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_2 - x_1 > 0$ Άρα και $x_2 + x_1 - 2 > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_2 > 2 - x_1 \Leftrightarrow 2 - x_1 < x_2$

Όμως $x_1 < 1 \Leftrightarrow -x_1 > -1 \overset{+2}{\Leftrightarrow} 2 - x_1 > 1 \to 2 - x_1 \in (1, +\infty)$

και $x_2 > 0$ όπου η $f \nearrow$

Έτσι $2 - x_1 < x_2 \overset{f \nearrow}{\Leftrightarrow} f(2 - x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow \underline{f(2 - x_1) < 0}$

Δ4. Η f είναι κυρτή

και η εφ της C_f στο x_2: $y - f(x_2) = f'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow$

$y = f'(x_2)(x - x_2)$

Η C_f βρίσκεται πάνω από την εφ, δηλ $f(x) \geq y \Leftrightarrow$

$f(x) \geq f'(x_2)(x - x_2)$ (1) (Η ισότητα ισχύει για $x = x_2$)

Επίσης $f(1) = 1 - \ln 3 \Leftrightarrow \ln 3 = 1 - f(1)$

Άρα $2f(x) + \ln 3 = 1 + f'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow$

$2f(x) + \cancel{1} - f(1) - \cancel{1} - f'(x_2)(x - x_2) = 0 \Leftrightarrow$

$f(x) - f(1) + f(x) - f'(x_2)(x - x_2) = 0$

Η f παρουσιάζει ο.ε στο $x = 1$, άρα $f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow f(x) - f(1) \geq 0$ (2)

(η ισότητα ισχύει για $x = 1$)

Επομένως η εξίσωση λόγω (1) & (2) είναι <u>ΑΔΥΝΑΤΗ</u>